基礎数学選書

5

編集委員会

群と位相

信州大学教授
理学博士

横田一郎 著

裳華房

編 集 趣 旨

最近の科学技術の発展には誠に目覚しいものがあります．それにつれてその基礎であり，その手段である数学の重要性はますます増大しつつあります．

また一方，いままでは主として科学技術の方面にのみ応用をもっていると思われていた数学が，最近になって実は，人間のあらゆる社会活動を対象とする行動科学の方面にも非常に大きな応用をもっていることが明らかになってまいりました．

このように，科学技術と行動科学の２つの方面からの社会的要求はますます増大する一方ですので，大学における数学教育の比重はますます大きくなりつつあります．

しかしながら誠に残念なことに，大学の講義時間には大きな制限があるために，講義がややもすれば型通りになりがちで，学生の数も毎年増加の一途をたどっていますので，講義だけで学生が将来必要な数学をマスターするということはますます困難になりつつあるのが現状です．

このような状態のもとで，大学の講義を十分に理解し，それを活用する力を十分に身につけるには，初学者の心理も盲点も知りつくしている経験豊かな著者の手になる懇切丁寧な参考書によるのが一番よい方法です．

ややもすれば，大学生相手の書物には読者をつきはなしたような態度が多いのですが，その点を改め，読者諸君が素直に読み進むことができ，しかもそれによって厳密で豊富な知識が身につき，理論に対する真の興味がわいてくるようにと念願して企画されたのが，この「基礎数学選書」であります．

本選書は，以上の趣旨に基づいて，数学の種々の分科を１つ１つ教科書風の堅苦じさから解放された自由な立場から，できるだけ詳細に解説するという目的で，比較的多くの小冊子に分けられています．

読者諸君は，この選書のうちから諸君が必要とされるもの，興味をもたれるものを自由に選ぶことができると思います．

編集委員会は，この選書に入れた項目で，将来数学を活用しようとする人たちに必要なものはほとんど網羅していると信じます．

また，将来それを活用する場合，数学はこの選書に解説されている内容で十分役立つと確信します．

したがって，これらの選書で学習し，それらを書棚においておかれるならば，社会にでて数学を活用する場合にも大いに役立つことを信じて疑わないものであります．

昭和44年8月

矢野健太郎
国沢清典
茂木勇
石原繁
岩堀長慶

まえがき

位相幾何学をはじめ数学で取扱う図形のうちで最も基本的で重要であると思われるものに球面，射影空間，Lie 群およびその等質空間（Stiefel 多様体，Grassmann 多様体，対称空間等）がある．本書では球面 S^{n-1}，射影空間 $\boldsymbol{R}P_{n-1}$，$\boldsymbol{C}P_{n-1}$，$\boldsymbol{H}P_{n-1}$，古典 Lie 群 $O(n)$，$U(n)$，$Sp(n)$ に話を限って，これらの空間をいろいろの面から詳しく調べることを目的としている．以下各章の内容について少し触れておこう．

第1章では射影空間と古典群の定義を与える．特に射影空間を行列を用いて定義するが，これは射影空間と古典群の関係を示唆しているので詳しく述べておいた．第2章では射影空間と古典群の位相空間としての性質（連結，コンパクト等）を中心に述べる．第3章では射影空間と古典群の胞体分割を与えた．これにより球面，射影空間，古典群の相互の関係がより一層詳しく明らかになる．第4章では回転群 $SO(n)$ の被覆群であるスピノル群 $Spin(n)$ を定義し，$Spin(n)$，$SU(n)$，$Sp(n)$ が単連結コンパクト群であることを証明するのを目的とした．そのためにファイバー空間，被覆空間，基本群等に触れている．最後の付録では例外群 F_4 が古典群と類似している面があることをお話し程度に書いておいた．

基礎数学選書の趣旨にしたがって説明を懇切ていねいに与え，できる限り予備知識を仮定しないで読めるようにした．また理解を助けるために例を多くあげ，話が抽象的にならないようにした．特に $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}=S^1$ は簡単でしかもよい例であると思うので重複をいとわず各所にあげておいた．書き足りないと思う部分が多くあるが第1章から第4章までの内容がそれぞれ独立したものではなくて1つの流れがあることを読みとって頂ければと願っている．読者が位相群または位相幾何学に対する興味をひきおこし，さらに中級，高級位相幾何学（ホモロジー論，ホモトピー論，K-理論，多様体論等）へ進む1つの手掛りをつ

かむことに本書が少しでも役立つならばこれ以上の喜びはないのである.

なお本書を書くに際して東京大学岩堀長慶教授にいろいろ御指導いただいことを私は先ず感謝しなければならない. また遠藤恭平, 保井秀夫両氏はじめ裳華房編集部の皆々様に大へんお世話になったことを感謝している. 最後にこの書を丹念に植字して下さった中央印刷株式会社の小島肇氏に敬意を表し御礼申し上げる.

1971年1月

横田一郎

目　　次

1. 射影空間と古典群の定義

2. 射影空間と古典群の位相

3. 射影空間と古典群の胞体分割

4. 射影空間と古典群の基本群と被覆空間

付　　録

1 射影空間と古典群の定義

目的を射影空間と古典群の定義を与えることにおき，そのために必要な数学的概念（同型，類別，群，体）を説明しよう．

§1. 写像と集合

(1) 写像と集合の同型

X, Y を2つの集合とする．集合 X の各元 x に対して集合 Y の元 y がただ1つ対応する（この y を $f(x)$ で表わす）とき，X から Y への**写像** f が与えられたといい，$f: X \to Y$ で表わす．写像 $f: X \to Y$ が与えられたとき，X の部分集合 A に対して Y の部分集合

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

を A の f による**像**という．また Y の部分集合 B に対して X の部分集合

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

を B の f による**逆像**（または**原像**）という．

$f: X \to Y$ を写像，A を X の部分集合とするとき，各元 $a \in A$ に対して $f'(a) = f(a)$ と定義すると写像 $f': A \to Y$ を得る．この写像 f' を f の A における**制限**といい，$f|A$, $f: A \to Y$ または単に f で表わす．逆に写像 $f': A \to Y$ に対して $f|A = f'$ をみたす写像 $f: X \to Y$ を f' の X への**拡張**という．

$A_1, \cdots, A_n$; $B_1, \cdots, B_n$ をそれぞれ X, Y の部分集合とする．写像 $f: X \to Y$ が $f(A_i) \subset B_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ をみたすとき記号 $f: (X, A_1, \cdots, A_n) \to (Y, B_1, \cdots, B_n)$ で表わす．

写像 $f: X \to Y$ において，X の相異なる任意の2つの元 x, x' に対して $f(x) \neq f(x')$ がなりたつとき，f を**単射**（または**1対1写像**）という．A を X の部分集合とするとき，写像 $i: A \to X$ を $i(a) = a$ と定義するならば i は単射である．この写像 i を**包含写像**という．また写像 $f: X \to Y$ が $f(X) = Y$ をみたすとき，すなわち Y の任意の元

y に対して $f(x)=y$ となる X の元 x が存在するとき，f を**全射**（または**上への写像**）という．写像 $f: X \to Y$ が単射でありかつ全射であるとき，f を**全単射**という．集合 X において，写像 $1_X: X \to X$ を $1_X(x)=x$ と定義すると 1_X は明らかに全単射である．この写像 1_X を X における**恒等写像**という．この 1_X を単に 1 で表わすことが多い．2つの写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ に対して，写像 $h: X \to Z$ を $h(x)=g(f(x))$ と定義する．この写像 h を gf で表わし，f と g との**合成写像**という．

補題 1. X, Y を集合とする．2つの写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ が

$$gf = 1_X$$

をみたすならば f は単射であり，g は全射である．

証明 $x, x' \in X$ に対して $f(x)=f(x')$ とする．このときこの両辺に写像 g を施すと $g(f(x))=g(f(x'))$ となるが，条件 $gf=1_X$ より $x=x'$ となる．すなわち f は単射である．また $x \in X$ に対して Y の元 $f(x)$ を考えると $g(f(x))=x$ となる．したがって g は全射である．

2つの集合 X と Y の間に全単射 $f: X \to Y$ が存在するとき，X と Y は**集合として同型**であるといい，記号 $X \approx Y$ で表わす．2 つの集合 X と Y が集合として同型であるための必要十分条件は $gf=1_X$, $fg=1_Y$ をみたす2つの写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ が存在することである．この写像 g は f に対して1意に定まるので，g を f^{-1} で表わし f の**逆写像**という．

例 1. $\boldsymbol{Z}$ を整数全体の集合とする：$\boldsymbol{Z}=\{\cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$．このとき写像 $f: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$, $f(n)=2n$, は単射である（全射ではない）．

例 2. $\boldsymbol{Z}$ を整数全体の集合とし，$\boldsymbol{Z}_2$ を2つの整数0，1からなる集合：$\boldsymbol{Z}_2=\{0, 1\}$ とする．このとき写像 $f: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}_2$, $f(2n)=0$, $f(2n+1)=1$ は全射である（単射ではない）．

例 3. $\boldsymbol{Z}_2$ を0, 1からなる集合とし，S^0 を2つの整数 -1, 1からなる集合：$S^0=\{-1, 1\}$ とするとき，$\boldsymbol{Z}_2$ と S^0 は集合として同型である：$\boldsymbol{Z}_2 \approx S^0$．実際，写像 $f: \boldsymbol{Z}_2 \to S^0$ を $f(0)=1$, $f(1)=-1$ と定義するならば f は全単射であるからである．

例 4. $\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とし，$\boldsymbol{R}^+$ を正の実数全体の集合：$\boldsymbol{R}^+=\{x \in \boldsymbol{R} \mid x>0\}$ とするとき，$\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}^+$ は集合として同型である：$\boldsymbol{R} \approx \boldsymbol{R}^+$．実際，写像 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^+$, $g: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$ をそれぞれ $f(x)=e^x$, $g(x)=\log x$ と定義するならば，指数関数と対数関数はたがいに逆関数であることから $gf=1_{\boldsymbol{R}}$, $fg=1_{\boldsymbol{R}^+}$ がなりたつからである．

例 5. $\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とし，(0, 1) を開区間 $\{x \in \boldsymbol{R} \mid 0 < x < 1\}$ とするとき，$\boldsymbol{R}$ と (0, 1) は集合として同型である：$\boldsymbol{R} \approx (0, 1)$．実際，写像 $f:(0, 1) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = -\cot \pi x$ は全単射であるからである．写像 $g:(0, 1) \to \boldsymbol{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{x}$ も全単射であるから別証明としてこの写像 g を用いてもよい．

(2) 直 積 集 合

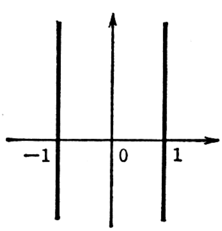
集合 X, Y から新らしい集合 $X \times Y$ をつくることを考えよう．X の元 x と Y の元 y との対 (x, y) を考え，2 つの対 (x, y) と (x', y') が等しいとは $x = x'$, $y = y'$ のとき，かつそのときに限ると約束する．対 (x, y) の全体の集合

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

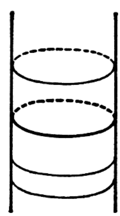
を X と Y の**直積集合**という．集合 $X_1, \cdots, X_n$ に対しても同様にして直積集合 $X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n\}$ が定義できる．

例 6. $\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とするとき，$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ は点 (x, y), $x, y \in \boldsymbol{R}$ 全体の集合であるから（ユークリッド）平面のことである．$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{R}^2$ とかくことが多い．

例 7. $S^0 = \{-1, 1\}$ とし，$\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とするならば，$S^0 \times \boldsymbol{R}$ は下の左図のような 2 本の直線を表わしている．



$S^0 \times \boldsymbol{R}$



$S^1 \times \boldsymbol{R}$

例 8. S^1 を原点を中心とする半径 1 の円とし，$\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とするとき，$S^1 \times \boldsymbol{R}$ は上の右図のような円柱の表面である．

例 9. $\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とし，$\boldsymbol{C}$ を複素数全体の集合とするならば，$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{C}$ は集合として同型である：$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \approx \boldsymbol{C}$．実際，写像 f: $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$, $f(x, y) = x + yi$ は全単射である．

X, Y を集合とする．写像 $p: X \times Y \to X$, $q: X \times Y \to Y$ をそれぞれ

$$p(x, y) = x, \qquad q(x, y) = y$$

と定義し，p を（$X\times Y$ から）X **への射影**，q を Y **への射影**という．射影 p, q は全射である．つぎに元 $x_0\in X$，$y_0\in Y$ を固定しておいて，写像 $i: X\to X\times Y$，$j: Y\to X\times Y$ をそれぞれ $i(x)=(x, y_0)$，$j(y)=(x_0, y)$ と定義するならば，i, j は単射である．このとき，$pi=1_X$，$qj=1_Y$ がなりたっている．

2つの写像 $f: X\to X'$，$g: Y\to Y'$ に対して $h(x, y)=(f(x), g(y))$ と定義すると写像 $h: X\times Y\to X'\times Y'$ を得る．この写像 h を $f\times g$ で表わし，f と g の**直積写像**という．

§2. 類別と同値法則

この節で，数学で最も大切な基本概念の1つである類別と同値法則について説明しておこう．本書では特に類別の代表系という考え方を強調したいと思う．それが空間の性質を直観的に，また幾何学的に考察することに結びついていることがあるからである．

(1) 類別と代表系

定義　集合 X をたがいに共通元をもたない空でない部分集合 $A, B, C, \cdots$ に分けることと

$$X=A\cup B\cup C\cup\cdots$$

を X を**類別する**という．各部分集合 $A, B, C, \cdots$ を**類**という．X の元 a はどれか1つの類に含まれ，かつ a を含む類はただ1つであることは明らかである．X の元 a が類 A に含まれるとき，A を a を**含む類**といい，$A=[a]$ で表わす．各類 $A, B, C, \cdots$ からそれぞれ1つずつ元 $a, b, c, \cdots$ をとってきてできる集合 $\{a, b, c. \cdots\}$ を類別の**代表系**といい，$a, b, c, \cdots$ をそれぞれ類 $A, B, C, \cdots$ の**代表元**という．

例 10.　$\boldsymbol{Z}=\{\cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ を整数全体の集合とする．偶数全体からなる $\boldsymbol{Z}$ の部分集合 $A_0=\{\cdots, -2, 0, 2, 4, 6, \cdots\}$ と奇数全体からなる $\boldsymbol{Z}$ の部分集合 $A_1=\{\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots\}$ を考えると，A_0 と A_1 には共通元がなく，かつ

$$\boldsymbol{Z}=A_0\cup A_1$$

となっている．すなわち $\boldsymbol{Z}$ は2つの類 A_0, A_1 に類別されたわけである．1を含む類は A_1 である．したがって $[1]=A_1$ である．また7を含む類も A_1 であるから $[7]=A_1$ にもなっている．1は A_1 の代表元であり，また7も A_1 の代表元である．集合 $\{0, 1\}$ はこの類別の代表系であり，集合 $\{-6, 7\}$ も代表系である．この例では代表系のとり方は無数にある．

(2) 同値法則

定義 集合 X に記号 $\sim$ で表わされる関係が定義されており，X の任意の元 x, y に対して，$x \sim y$ であるか $x \not\sim y$ であるかのいずれかであって，かつつぎの3つの条件

(1) $x \sim x$ (反射法則)

(2) $x \sim y$ ならば $y \sim x$ (対称法則)

(3) $x \sim y, y \sim z$ ならば $x \sim z$ (推移法則)

がなりたつとき，関係 $\sim$ は**同値法則**をみたす（または関係 $\sim$ は**同値関係**である）という．また $x \sim y$ であるとき x と y は**同値**であるという．

集合 X に同値法則をみたす関係 $\sim$ が与えられているとき，元 a に同値な X の元全体の集合を X_a とする：

$$X_a = \{x \in X | x \sim a\}$$

このとき，反射法則 (1) より $a \in X_a$ がわかるから X_a は空でない．つぎに，X の2つの部分集合 $X_a, X_{a'}$ に対して $X_a = X_{a'}$ か $X_a \cap X_{a'} = \phi$ (ϕ は空集合を表わす) のどちらかがなりたつことを示そう．そのためには $X_a \cap X_{a'} \neq \phi$ ならば $X_a = X_{a'}$ を示すとよい．$X_a \cap X_{a'} \neq \phi$ であるから元 $a'' \in X_a \cap X_{a'}$ を選んでおく．さて $x \in X_a$ とすると定義より $x \sim a$ である．一方 $a'' \in X_a$ であるから $a'' \sim a$ であるが，これに対称法則 (2) を用いると $a \sim a''$ となる．$x \sim a, a \sim a''$ となったから推移法則 (3) より $x \sim a''$ となる．また $a'' \in X_{a'}$ であるから $a'' \sim a'$ である．$x \sim a'', a'' \sim a'$ となったから再び推移法則 (3) を用いて $x \sim a'$ となり $x \in X_{a'}$ がわかる．すなわち $X_a \subset X_{a'}$ がなりたつ．a と a' をいれかえて考えると $X_{a'} \subset X_a$ もなりたつ．したがって $X_a = X_{a'}$ である．

このようにして，たがいに同値な元を1つにまとめれば X を類別することができる：

$$X = X_a \cup X_b \cup X_c \cup \cdots$$

このようにしてできた X の類の集合 $\{X_a, X_b, X_c, \cdots\}$ を $X/\sim$ で表わし，関係 $\sim$ による X の**等化集合**（または**商集合**）という．このとき集合 $\{a, b, c, \cdots\}$ はこの類別の代表系であり，写像 $f: X/\sim \to \{a, b, c, \cdots\}, f(X_a) = a$ は明らかに全単射である．したがって $X/\sim$ と $\{a, b, c, \cdots\}$ は集合として同型である：

$$X/\sim \approx \{a, b, c, \cdots\}$$

代表系であることを強調して本書では $X/\sim \approx \{a, b, c, \cdots\}$ のように記号 $\approx$ を用いることにしよう．

例 11. Z を整数全体の集合とする．Z において

$$n \sim m \iff n - m \text{ が2の倍数}$$

と定義すると関係 $\sim$ は同値法則をみたす．偶数同志および奇数同志はたがいに同値であるが，偶数と奇数とは同値ではない．したがって関係 $\sim$ による $\boldsymbol{Z}$ の類別が得られるがこれは例 10 にほかならない：$\boldsymbol{Z} = A_0 \cup A_1$．そして $\boldsymbol{Z}/\sim = \{A_0, A_1\} \approx \{0, 1\}$ である．もちろん $\boldsymbol{Z}/\sim \approx \{-6, 7\}$ としてもかまわない．

集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられているとき，X を関係 $\sim$ により類別すること，すなわち $X/\sim$ の構造を調べることは一般には容易なことではない．(むしろ不可能に近い程難しいことの方が多いといえるかも知れない)．$X/\sim$ の構造を調べるためにその代表系をうまく選んで，その代表系の構造を調べるという方法がある．この方法は代表系と $X/\sim$ は集合として同型であるから $X/\sim$ の集合としての構造の解答になっているかも知れないが，後で述べるように $X, X/\sim$ に「位相」や「群」の構造をいれて考えるとき，代表系が（ときにはどのように代表系を選んでも）その構造をうまく引き継がないことがあるので，代表系を調べることが必ずしもよい方法であるとはいえない．しかし代表系が $X/\sim$ の性質を近似的に表示することがあるので，その場合には $X/\sim$ を調べるための有力な手掛りとなる．

例 12.　I を閉区間 $[0, 1] = \{t \in \boldsymbol{R} \mid 0 \leqq t \leqq 1\}$ とする．I において

$$s \sim t \iff s = t \text{ であるか } s = 0, t = 1 \text{ または } s = 1, t = 0$$

と定義すると関係 $\sim$ は同値法則をみたす．0 と 1 は同じ類に属し，その他の数 t ($0 < t < 1$) は自分自身で 1 つの類をつくっているので，区間 $[0, 1) = \{t \in \boldsymbol{R} \mid 0 \leqq t < 1\}$ はこの類別の代表系である：

$$I/\sim \approx [0, 1)$$

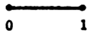
区間 $(0, 1] = \{t \in \boldsymbol{R} \mid 0 < t \leqq 1\}$ も $I/\sim$ の代表系であり，かつ $I/\sim$ の代表系は $[0, 1)$, $(0, 1]$ の 2 つしかない．S^1 を原点を中心とする半径 1 の円：$S^1 = \{(x, y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とするとき，$[0, 1)$ と S^1 は集合として同型である：

$$[0, 1) \approx S^1$$

実際，写像 f: $[0, 1) \to S^1$ を $f(t) = (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$ と定義すると，f は全単射であるからである．したがって初めの結果とあわせて

$$I/\sim \approx S^1$$

を得る．後で述べるような位相（98 頁）を $I/\sim$ にいれると，$I/\sim$ を $[0, 1)$ とみるよりは $I/\sim$ を S^1 とみなす方がよいことがわかる（例 101）．その理由は 0 と 1 付近の点とは

近くの点とみなしたいからである．$I/\sim$ を S^1 とみなす直観的な感じは線分 

をひもにみたてて両端 0, 1 を同一視してくっつけると円 S^1 になるだろうという感じである．逆に S^1 とみなした $I/\sim$ を $[0, 1)$ とみなす感じはその円 S^1 のある箇所に鋏をいれて切り開いた図形とみなすことである．

お話し　2つの集合 X, Y が集合として同型であることを集合論では X と Y は同じ**濃度**をもつともいう．そして集合論でよく知られているように，閉区間 $I=[0, 1]$ も平面 $\boldsymbol{R}^2$ も空間 $\boldsymbol{R}^m$ もまた単位球面 S^n も，さらに $\boldsymbol{R}^m$ の任意の部分集合 A（ただし $A\supset I$ とする）も皆同じ実数濃度をもつのでいずれも集合としては同型である：

$$I\approx\boldsymbol{R}^2\approx\boldsymbol{R}^m\approx S^n\approx A$$

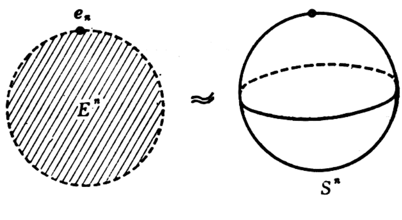
このように随分直観的に異なる集合が集合としては同型になってしまう．本書では「位相」をいれて考えたいので，このように集合としては同型であっても位相構造のかけ離れているものを同じとみることはしないし，また本書の例の中にもとりあげていない．また区間 $I=[0, 1]$ と円 S^1 と直線 $\boldsymbol{R}$ も同じ濃度をもつので集合として同型である：

$$I\approx S^1\approx\boldsymbol{R}$$

しかも位相空間として皆異なっていることも上述と同じである．しかしこんどの場合，位相空間として異なっているとはいうものの $I, S^1, \boldsymbol{R}$ はよく似た空間なのである．実際，$I=[0, 1]$ から2点0と1を除いた開区間 $(0, 1)$ と，S^1 から1点を除いた空間と，$\boldsymbol{R}$ それ自身は位相空間として同型なのである．すなわち少しの例外点を除くと位相空間として同型になるので類似しているとみなしたいわけである．$X/\sim$ の代表系 $\{a, b, c, \cdots\}$ を選ぶとき，$X/\sim$ と $\{a, b, c, \cdots\}$ が位相空間としてできるだけ類似しているように代表系をうまく選びたいわけである．この考え方は第3章において位相空間を胞体分割して調べようという考えにつながると思うのでお話しとして述べておいた．以下の例もこれと同じ考えに基づいている．

例 13.　$V^n=\{(x_1, \cdots, x_n)\in\boldsymbol{R}\times\cdots\times\boldsymbol{R}\,|\,x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2\leqq 1\}$，$S^{n-1}=\{(x_1, \cdots, x_n)\in V^n\,|\,x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2=1\}$ とする．V^n において

$$\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}\iff\begin{array}{c}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\\ \text{または}\\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in S^{n-1}\end{array}$$



と定義すると関係 $\sim$ は同値法則をみたす．

$e_n=(0,\cdots,0,1)$, $E^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in V^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2<1\}$ とおくと $e_n\cup E^n$ は $V^n/\sim$ の1つの代表系である：

$$V^n/\sim\ \approx e_n\cup E^n$$

$S^n=\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\in R\times\cdots\times R \mid x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1\}$ とおくとき，例12と同じようにして $V^n/\sim\ \approx S^n$ とみなすことができる．実際，写像 $f: e_n\cup E^n\to S^n$ を

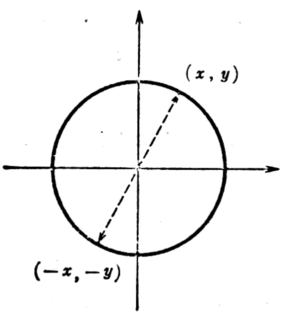
$$f(e_n)=(0,\cdots,0,1)$$

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(-2x_1x_{n+1},\cdots,-2x_nx_{n+1},1-2x_{n+1}^2)$$

（ただし $(x_1,\cdots,x_n)\in E^n$, $x_{n+1}=\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_n^2}$ とする）と定義するならば f は全単射である（例104参照）．

例 14.　$S^1=\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2=1\}$ において

$$(x,y)\sim(x',y') \iff (x,y)=(x',y') \text{ または } (x,y)=(-x',-y')$$



と定義すると関係 ～ は同値法則をみたす．このとき $S^1/\sim$ の代表系として上半円  を選ぶことができる．式でかくと

$$S^1/\sim\ \approx\{(\cos\theta,\sin\theta)\mid 0\leqq\theta<\pi\}$$

となる．（上式の右辺を P_1 とおく）．さらにこの集合 $S^1/\sim$ をつぎのようにみよう．すなわち $S^1/\sim$ を上半円  の両端の黒丸の2点をくっつけた円とみなすわけである．厳密に式でかくとつぎのようになる．

写像 $f: P_1\to S^1$ を

$$f(\cos\theta,\sin\theta)=(\cos 2\theta,\sin 2\theta)$$

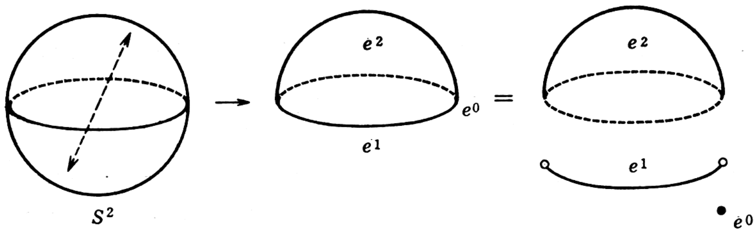
と定義するならば，f は全単射である．よって $P_1\approx S^1$ である．したがって始めの $S^1/\sim\ \approx P_1$ とあわせて $S^1/\sim\ \approx S^1$ を得る．

例 15.　$S^{n-1}=\{(x_1,\cdots,x_n)\}\in R\times\cdots\times R \mid x_1^2+\cdots+x_n^2=1\ (n\geqq 1)$ において

$$(x_1,\cdots,x_n)\sim(x_1',\cdots,x_n') \iff \begin{array}{l}(x_1,\cdots,x_n)=(x_1',\cdots,x_n') \text{ または}\\(x_1,\cdots,x_n)=(-x_1',\cdots,-x_n')\end{array}$$

と定義すると関係 ～ は同値法則をみたす．$S^{n-1}/\sim$ の代表系として $e^k=\{(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1},0,\cdots,0)\in S^{n-1} \mid x_1^2+\cdots+x_k^2+x_{k+1}^2=1,\ x_{k+1}>0\}$, $k=0,1,\cdots,n-1$ を選ぶことができる：

$$S^{n-1}/\sim\ \approx \bigcup_{k=0}^{n-1} e^k$$



この例は例 14 の拡張になっている．

例 16. 平面から原点を除いた集合を $\boldsymbol{R}^2-\{0\}$ とする：$\boldsymbol{R}^2-\{0\}=\{(x, y)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\,|\,(x, y)\neq(0, 0)\}$. $\boldsymbol{R}^2-\{0\}$ において

$$(x, y)\sim(x', y') \iff x'=ax,\ y'=ay \quad \text{をみたす} \quad a\in\boldsymbol{R} \quad \text{が存在する}$$

と定義すると関係 $\sim$ は同値法則をみたす．$y=0$ のときは $x\neq 0$ であるから $(x, 0)\sim(1, 0)$ である．$y\neq 0$ のときには $(x, y)\sim\left(\dfrac{|y|x}{y\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ であるから，$(\boldsymbol{R}^2-\{0\})/\sim$ の代表系として

$$(1, 0)\cup\{(x, y)\,|\,x^2+y^2=1,\ y>0\}$$

を選ぶことができる．図式でかくと $(\boldsymbol{R}^2-\{0\})/\sim\ \approx$  である．例 14 と同じ考察をすると $(\boldsymbol{R}^2-\{0\})/\sim\ \approx S^1$ にもなる．

例 17. n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ $(n\geqq 1)$ から原点を除いた集合を $\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ とする：$\boldsymbol{R}^n-\{0\}=\{(x_1, \cdots, x_n)\in\boldsymbol{R}\times\cdots\times\boldsymbol{R}\,|\,(x_1, \cdots, x_n)\neq(0, \cdots, 0)\}$. $\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ において

$$(x_1, \cdots, x_n)\sim(x_1', \cdots, x_n') \iff \begin{array}{l} x_1'=ax_1, \cdots, x_n'=ax_n \quad \text{をみたす} \\ a\in\boldsymbol{R} \quad \text{が存在する} \end{array}$$

と定義すると関係 $\sim$ は同値法則をみたす．この例は例 16 の拡張でありそして例 16 と同じ考察をするならば，$(\boldsymbol{R}^n-\{0\})/\sim$ の代表系として例 15 と同じ $\bigcup_{k=0}^{n-1} e^k$ をとることができる．

例 18. X を (x, y)-平面上における直線全体の集合とする．2 本の直線 l と l' が平行であるとき（l と l' が一致するときも平行であるということにする），l と l' は同値であると定義する：

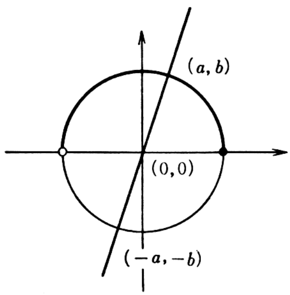
$$l \sim l' \iff l \parallel l'$$

X におけるこの関係 $\sim$ は同値法則をみたす．$X/\sim$ についてつぎのいろいろな見方をしてみよう．

たがいに平行な直線全体の集合の中には原点を通る直線がちょうど 1 本含まれているから，原点を通る直線全体の集合は $X/\sim$ の 1 つの代表系である：

$$X/\sim \approx \{原点を通る直線全体\}$$

原点を通る直線は原点を中心とする半径 1 の円 S^1 と 2 点 (a, b), $(-a, -b)$ で交わる．



逆に S^1 上の 2 点 (a, b), $(-a, -b)$ はその 2 点を結ぶことにより原点を通る直線を 1 本決定するので

$$\begin{aligned}&\{原点を通る直線全体\}\\ &\approx S^1 \text{ の向い合った点を同一視した集合（例 14）}\\ &\approx S^1\end{aligned}$$

となる．

原点を通る直線は $y = mx$ と表わされる（ただし y 軸は $x = 0$ である）．この直線上の点は (x, mx) と表わされ，かつ x がいろいろの実数値をとるとき点 (x, mx) の集合が原点を通る直線 $y = mx$ を表わす（y 軸は $(0, y)$, $y \in \boldsymbol{R}$ 全体の集合である）ので原点を通る直線全体の集合と $(\boldsymbol{R}^2 - \{0\})/\sim$（例 16）は集合として同型である．

$X/\sim$ をつぎのようにみることもできるだろう．2 つの直線 l と l' が平行であるための必要十分条件は l と l' が同じ傾き m $(m \in \boldsymbol{R})$ をもつことである（ただし y 軸に平行な直線の傾きは記号 ∞ であるとしておく）ことに注意すると

$$X/\sim \approx \boldsymbol{R} \cup \infty$$

となることがわかる．上式の右辺は，実数直線 $\boldsymbol{R}$ に無限遠点 ∞ をつけ加えると円 S^1 になると思うわけである．厳密に式でかくとつぎのようになる．写像 $f: \boldsymbol{R} \cup \infty \to S^1$ を

$$f(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right), \qquad t \in \boldsymbol{R}$$

$$f(\infty) = (-1, 0)$$

と定義すると f は全単射である：$X/\sim \approx \boldsymbol{R} \cup \infty \approx S^1$．

例 19.　例 18 を任意の n $(n \geqq 1)$ のときに拡張しよう．X を n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ における直線全体の集合とする．X において

$$l \sim l' \iff l \parallel l'$$

と定義すると関係 $\sim$ は同値法則をみたす．例18と同じようにして

$$\begin{aligned} X/\sim &\approx \text{原点を通る直線全体の集合} \\ &\approx (\boldsymbol{R}^n - \{0\})/\sim \qquad (\text{例}17) \\ &\approx S^{n-1}/\sim \qquad (\text{例}15) \\ &\approx \text{直線の方向余弦全体の集合} \end{aligned}$$

であることがわかる．

例 20. $\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とする．$\boldsymbol{R}$ において

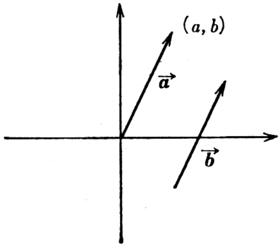
$$x \sim y \iff x - y \text{ が整数}$$

と定義すると関係 $\sim$ は同値法則をみたす．任意の実数 x は $x = n + t$（n は整数，t は $0 \leqq t < 1$）と1通りに表わされるので，各類の代表元として $0 \leqq t < 1$ なる t を選ぶことができる．したがって区間 $[0, 1)$ は $\boldsymbol{R}/\sim$ の1つの代表系である：

$$\boldsymbol{R}/\sim \approx [0, 1)$$

例12と同様にすると $\boldsymbol{R}/\sim \approx S^1$ とみなすこともできる．

例 21. X を平面 $\boldsymbol{R}^2$ における有向線分全体の集合とする．2つの有向線分 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は向きと長さが同じであるとき同値であると定義すると，この関係 $\sim$ は X に同値関係を与える．各類に始点が原点である有向線分がちょうど1本含まれているので



$$X/\sim \approx \{\text{始点が原点である有向線分の全体}\}$$

となる．つぎに始点が原点である有向線分 $\vec{a}$ にその矢印の先端の点 (a, b) を対応させることによって，始点が原点である有向線分全体の集合と $\boldsymbol{R}^2 - \{0\}$ は集合として同型であることがわかる．したがって

$$X/\sim \approx \boldsymbol{R}^2 - \{0\}$$

となる．

(3) 射影と断面

集合 X に同値法則をみたす関係 $\sim$ が与えられているとき，写像 $p : X \to X/\sim$ を

$$p(x) = [x]$$

（$[x]$ は x を含む類）と定義するならば p は全射である．この写像 p を**射影**（または**自然な射影**）という．つぎに $X/\sim$ の各類 A に対してその代表元 a を定めて，写像 $s : X/$

$\sim \to X$ を

$$s(A) = a$$

と定義するならば明らかに $ps = 1_{X/\sim}$ をみたしている．一般に $ps = 1_{X/\sim}$ をみたす写像 $s : X/\sim \to X$ を p の **断面** という．$ps = 1_{X/\sim}$ であるから断面 s は単射である（補題1）．断面 s の像 $s(X/\sim)$ は $X/\sim$ の1つの代表系であり，逆に $X/\sim$ の代表系を与えると p の1つの断面が定義できる．したがって，$X/\sim$ の代表系を考察することと p の断面を調べることとは同じことである．代表系の選び方が1通りでないと同様に，p の断面の選び方も1通りではない．

$X/\sim$ の代表系をうまく選びたいという希望は $X, X/\sim$ の構造に応じて断面 $s : X/\sim \to X$ をうまく選びたいという希望に対応するわけである．$X, X/\sim$ が位相空間であるときには連続な断面を，$X, X/\sim$ が群であるときには準同型な断面を選べることが理想的である．(実際にはそのようにならないことの方が多いが)．

例 22. X, Y を集合とする．直積集合 $X \times Y$ において，

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x = x'$$

と定義すると関係 $\sim$ は同値法則をみたす．元 (x, y) を含む類は $x \times Y$ であるから，射影 $p : X \times Y \to (X \times Y)/\sim$ は

$$p(x, y) = x \times Y$$

で与えられる．元 $y_0 \in Y$ を固定しておいて，写像 $s : (X \times Y)/\sim \to X \times Y$ を

$$s(x \times Y) = (x, y_0)$$

と定義すると s は p の1つの断面である．$x \times Y$ に x を対応させることにより $(X \times Y)/\sim$ と X は集合として同型であるので $(X \times Y)/\sim$ と X を同一視するとき，上述の p, s はそれぞれ写像

$$p : X \times Y \longrightarrow X, \qquad p(x, y) = x$$
$$i : X \longrightarrow X \times Y, \qquad i(x) = (x, y_0)$$

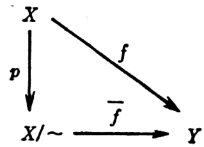
(3頁参照) に一致している．

(4) 誘導された写像

集合 X, Y と写像 $f : X \to Y$ が与えられ，かつ X に同値関係 $\sim$ が与えられているとする．いま，この写像 f が条件

$$x \sim x' \quad \text{ならば} \quad f(x) = f(x')$$

をみたしていると仮定する．この仮定は $X/\sim$ の類 A に対してその代表元 x の選び方に



関係せず $f(x)$ の値が一定であることを意味している．したがって

$$\bar{f}([x]) = f(x)$$

と定義すると写像 $\bar{f} : X/\sim \to Y$ が定義される．この写像 $\bar{f}$ を f より**誘導された写像**という．$p : X \to X/\sim$ を射影とすると明らかに

$$f = \bar{f}p$$

がなりたっている．

さらにつぎの補題がなりたつ．

補題 2. 条件と記号を上記の通りとするとき，つぎの (1), (2) がなりたつ．

（1） $f : X \to Y$ が全射ならば $\bar{f} : X/\sim \to Y$ も全射である．

（2） $f : X \to Y$ が条件

$$x \sim x' \iff f(x) = f(x')$$

をみたすならば，$\bar{f} : X/\sim \to Y$ は単射である．

証明 （1） $y \in Y$ に対して f が全射であるから $f(x) = y$ となる $x \in X$ がある．$p(x)$ を考えると $\bar{f}(p(x)) = f(x) = y$ となる．すなわち $\bar{f}$ は全射である．

（2） $\bar{f}([x]) = \bar{f}([x'])$ とすると，これは定義より $f(x) = f(x')$ を意味している．条件より $x \sim x'$ すなわち $[x] = [x']$ となる．よって $\bar{f}$ は単射である．

例 23. $\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とし，$\boldsymbol{R}$ に「$x \sim x' \Leftrightarrow x - x'$ が整数」の同値関係を与えておく（例 20）．$S^1 = \{(x, y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とし，写像 $f : \boldsymbol{R} \to S^1$ を

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

と定義するならば明らかに f は全射である．さらに $f(x) = f(x')$ とすると $\cos 2\pi x = \cos 2\pi x'$, $\sin 2\pi x = \sin 2\pi x'$ より $x - x'$ が整数であることがわかるから，写像 f は条件 $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ をみたしている．ゆえに補題 2 より f は全単射 $\bar{f} : \boldsymbol{R}/\sim \to S^1$ を誘導する：$\boldsymbol{R}/\sim \approx S^1$.

例 24. X, Y を集合とし，全射 $f : X \to Y$ が与えられているとする．このとき X において

$$x \sim x' \iff f(x) = f(x')$$

と定義すると関係 $\sim$ は同値法則をみたす．補題 2 より f は全単射 $\bar{f} : X/\sim \to Y$ を誘導する．したがって $X/\sim$ と Y は集合として同型である：$X/\sim \approx Y$.

ここで再び断面について述べよう．X, Y を集合とし，$f : X \to Y$ を全射とする．f に

対して写像 $s: Y \to X$ が

$$fs = 1_Y$$

をみたすとき s を f の**断面**という．さきに定義した断面（12頁）といま定義した断面とは本質的に同じであると思ってよい．実際，例24で示したように X に同値関係 $\sim$ を

$$x \sim x' \iff f(x) = f(x')$$

で与えると f は全単射 $\bar{f}: X/\sim \to Y$ を誘導した（例24）．そして $f: X \to Y$ の断面 $s: Y \to X$ と射影 $p: X \to X/\sim$ の断面 $s\bar{f}: X/\sim \to X$ とが対応している．

§3.　群と等質集合

群を定義し，群 G をその部分群 H により類別して新しい集合 G/H を構成することを考える．また準同型定理をはじめ群論の基礎知識をまとめておこう．特に命題4の考え方は幾何学的に重要である．

(1)　群と群の同型

定義　集合 M の任意の2つの元 x, y に対して M の元 $x+y$ が1意に定まり

(1)　$x+y = y+x$　　　　**(可換法則)**

(2)　$(x+y)+z = x+(y+z)$　　**(結合法則)**

(3)　M に0とかかれる特定の元が存在して，M の任意の元 x に対して $x+0=x$ がなりたつ．

(4)　M の任意の元 x に対して，$x+(-x)=0$ をみたす M の元 $-x$ がある．

の4つの条件をみたすとき M は（和に関して）**加群**である（または**加群をつくる**）という．(3) の条件をみたす0は1意に定まりまた条件 (4) をみたす $-x$ は x に対してただ1つに定まることは容易にわかる．0を加群 M の**零元**，$-x$ を x の**逆元**という．

定義　集合 G の任意の2つの元 x, y に対して G の元 xy が1意に定まり

(1)　$(xy)z = x(yz)$　　**(結合法則)**

(2)　G に e とかかれる特定な元が存在して，G の任意の元 x に対して $xe = x$ がなりたつ．

(3)　G の任意の元 x に対して，$xx^{-1} = e$ をみたす G の元 x^{-1} がある．

の3つの条件をみたすとき G は（積に関して）**群**である（または**群をつくる**）という．加群のときと同様に (2) の条件をみたす e は1意に定まり，また条件 (3) をみたす x^{-1} は x に対してただ1つ定まる．e を群 G の**単位元**といい（単位元 e は1とかくこ

ともある）x^{-1} を x の**逆元**という．

群 G においては，任意の元 $x, y \in G$ に対して

$$ex = x,\ x^{-1}x = e,\ (x^{-1})^{-1} = x,\ (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

がなりたつことに注意しておこう．

群 G の任意の2つの元 x, y に対して

$$xy = yx \qquad \text{（可換法則）}$$

がなりたつとき，G を**可換群**（または **Abel 群**）という．

加群 M において，$x+y$ の代りに xy とかき，0を e, $-x$ を x^{-1} とかくと，M は積に関して可換群となるので加群は群の特別の場合である．したがって群でなりたつ性質は当然加群でもなりたっている．

例 25. 2つの元 0, 1 からなる集合 $\boldsymbol{Z}_2$ において，和を $0+0=0,\ 0+1=1+0=1,\ 1+1=0$ と定義すると $\boldsymbol{Z}_2$ は加群をつくっている．

例 26. 整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ は（和に関して）加群をつくっている．

例 27. 実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ は（和に関して）加群をつくっている．

例 28. 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ は（和に関して）加群をつくっている．

例 29. 2つの整数 $-1, 1$ からなる集合 S^0 は（積に関して）群をつくっている．

例 30. 0以外の実数全体の集合 $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{R} - \{0\}$ は（積に関して）群をつくっている．

例 31. 正の実数全体の集合 $\boldsymbol{R}^+ = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x > 0\}$ は（積に関して）群をつくっている．

例 32. 0以外の複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C} - \{0\}$ は（積に関して）群をつくっている．

例 33. 絶対値1の複素数全体の集合 $S^1 = \{x \in \boldsymbol{C} \mid |x| = 1\}$ は（積に関して）群をつくっている．

G, G' を群とする．写像 $f: G \to G'$ が

$$f(xy) = f(x)f(y), \qquad x, y \in G$$

をみたすとき，f を（群の）**準同型写像**（または単に**準同型**）という．準同型写像 $f: G \to G'$ が単射であるとき f を**単射準同型写像**といい，また準同型写像 $f: G \to G'$ が全射であるとき f を**全射準同型写像**という．準同型写像 $f: G \to G'$ が全単射であるとき，f を（群の）**同型写像**（または単に**同型**）という．2つの群 G と G' の間に同型写像 $f: G \to G'$ が存在するとき，G と G' は**群として同型**であるといい，$G \cong G'$ で

表わす.

補題3. G, G' を群とし，$f: G \to G'$ を準同型写像とする．写像 $g: G' \to G$ が $gf = 1_G$, $fg = 1_{G'}$ をみたすならば，g は準同型写像である．すなわち同型写像 $f: G \to G'$ の逆写像はまた同型写像である.

証明　$x', y' \in G'$ に対して $f(g(x'y')) = x'y' = f(g(x'))f(g(y')) = f(g(x')g(y'))$ となる．f が単射であるから $g(x'y') = g(x')g(y')$ がなりたつ．すなわち g は準同型写像である.

2つの群 G, G' が群として同型であるための必要十分条件は $gf = 1_G$, $fg = 1_{G'}$ をみたす2つの準同型写像 $f: G \to G'$, $g: G' \to G$ が存在することである（補題3).

例34.　$\boldsymbol{Z}$ を整数全体のつくる加群とする．写像 $f: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$, $f(n) = 2n$ は単射準同型写像である.

例35.　$\boldsymbol{Z}$ を整数全体のつくる加群，$\boldsymbol{Z}_2$ を2つの元 0, 1 のつくる加群とする（例25).
写像 $f: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}_2$ を $f(2n) = 0$, $f(2n+1) = 1$ と定義すると f は全射準同型写像である.

例36.　$\boldsymbol{Z}_2$ を2つの元 0, 1 のつくる加群（例25）とし，S^0 を2つの元 $-1, 1$ のつくる群（例29）とするとき，$\boldsymbol{Z}_2$ と S^0 は群として同型である：$\boldsymbol{Z}_2 \cong S^0$．実際，写像 $f: \boldsymbol{Z}_2 \to S^0$ を $f(0) = 1$, $f(1) = -1$ と定義すると f は群の同型写像である．また2つの元からなる群は（群としての同型を除いて）$\boldsymbol{Z}_2$ しかないことが容易にわかる.

例37.　$\boldsymbol{R}$ を実数全体のつくる加群とする．$a \in \boldsymbol{R}$ に対して写像 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = ax$ と定義するならば f は準同型写像である．$a \neq 0$ のときには f は同型写像である.

例38.　$\boldsymbol{R}$ を実数全体のつくる加群，$\boldsymbol{R}^+$ を正の実数全体のつくる群とする．写像 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^+$, $g: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = e^x$, $g(x) = \log x$ と定義するとき，$e^{x+y} = e^x e^y$, $\log xy = \log x + \log y$ の事実は f, g が準同型写像であることを示している．そして $gf = 1_{\boldsymbol{R}}$, $fg = 1_{\boldsymbol{R}^+}$ であるから $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}^+$ は群として同型である：$\boldsymbol{R} \cong \boldsymbol{R}^+$.

例39.　$\boldsymbol{R}$ を実数全体のつくる加群，S^1 を絶対値1の複素数全体のつくる群とする．このとき写像 $f: \boldsymbol{R} \to S^1$, $f(x) = e^{2\pi i x}$ は全射準同型写像である.

(2)　部分群と等質集合

まず演算に関する記号を導入しておこう．A, B を群 G の部分集合とするとき AB で元 ab（$a \in A, b \in B$）全体の集合を表わし，A^{-1} で元 a^{-1}（$a \in A$）全体の集合を表わすことにする：

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

$$A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}$$

定義　群 G の部分集合 H が G の積に関して群をつくるならば H を G の**部分群**という.

群 G の空でない部分集合 H が部分群であるための必要十分条件は

（1）　$x, y \in H$　ならば　$x^{-1}y \in H$

がなりたつことである.

実際, H が部分群ならば明らかにこの条件をみたしている. 逆に G の部分集合 H がこの条件をみたしているとする. $x \in H$ ならば条件 (1) において $x = y$ とおくと $e = x^{-1}x \in H$ となる. $x \in H$, $e \in H$ がわかったから条件 (1) より $x^{-1} = x^{-1}e \in H$ となる. また $x, y \in H$ ならば上記より $x^{-1} \in H$ となるので, 再び条件 (1) を用いると $xy = (x^{-1})^{-1}y \in H$ となる. 以上で H が群であることが証明された.

当然, 加群 M の空でない部分集合 N が部分加群であるための必要十分条件は

$$x, y \in N \quad \text{ならば} \quad x - y \in N$$

がなりたつことである.

群 G の空でない部分集合 H が部分群であるための条件 (1) はそれぞれつぎの (2), (3), (4) におきかえることができる.

（2）　$x, y \in H$　ならば　$xy \in H$

　　　$x \in H$　　ならば　$x^{-1} \in H$

（3）　$H^{-1}H \subset H$

（4）　$HH \subset H$,　　$H^{-1} \subset H$

なお, (3), (4) において包含記号 $\subset$ を等号 $=$ におきかえてもよい.

H を群 G の部分群とする. G において

$$x \sim y \iff x^{-1}y \in H$$

と定義すると関係 $\sim$ は同値法則をみたす. 実際, $x^{-1}x = e \in H$ であるから $x \sim x$ である. $x \sim y$ すなわち $x^{-1}y \in H$ とすると, $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1} \in H$ となるから $y \sim x$ となる. また $x \sim y$, $y \sim z$, すなわち $x^{-1}y \in H$, $y^{-1}z \in H$ とすると $x^{-1}z = (x^{-1}y)(y^{-1}z) \in H$ より $x \sim z$ となる.

G の元 a に対して, 元 ah ($h \in H$) は a に同値な元であり, 逆に a に同値な元は ah ($h \in H$) の形の元に限るので a を含む類は aH である. (類 aH を a を含む**剰余類**という). したがって G は

$$G = H \cup aH \cup bH \cup \cdots$$

（H は単位元 e を含む類である）の形に類別される．この同値関係 $\sim$ による G の等化集合 $G/\sim = \{H, aH, bH, \cdots\}$ を G/H で表わし，G の H による**等質集合**という．明らかに $\{e, a, b, \cdots\}$ は G/H の１つの代表系である：

$$G/H \approx \{e, a, b, \cdots\}$$

命題4. G を群とし，H を G の部分群とする．このとき S を等質集合 G/H の１つの代表系とすると，G の任意の元 x は１通りに

$$x = ah \qquad a \in S,\ h \in H$$

と表わされる．したがって G は

$$G = SH$$

となるが，さらに G と $S \times H$ は集合として同型である：

$$G \approx S \times H$$

証明 $SH \subset G$ は明らかである．逆に $G \subset SH$ を示そう．実際，$S = \{e', a, b, \cdots\}$ とすると G は

$$G = e'H \cup aH \cup bH \cup \cdots$$

と類別されているので G の元 x はある剰余類 aH に含まれている．したがって $x = ah$ $(a \in S, h \in H)$ と表わされるので $x = ah \in SH$ である．よって $G \subset SH$ である．つぎに $x = ah$ の表わし方が１通りであることを示そう．実際，$x = ah = a'h'$ $(a, a' \in S, h, h' \in H)$ とすると $a'^{-1}a = h'h^{-1} \in H$ となる．したがって $a \sim a'$ となり a と a' が同じ剰余類の代表元であることがわかる．よって $a = a'$ である．$a = a'$ となったから $ah = a'h'$ より $h = h'$ もわかる．最後に，写像 $g : S \times H \to G$ を $g(a, h) = ah$ と定義すると，上に述べたことから g は全単射である．したがって $S \times H \approx G$ である．

S を G/H の代表系としたから $G/H \approx S$ である．したがって $G \approx S \times H$（命題4）より $G \approx (G/H) \times H$ を得る．これを命題5として述べておくがあとの必要（命題86）のために g の逆写像を明示して証明しておこう．

命題5. G を群とし，H を G の部分群とする．このとき G と $(G/H) \times H$ は集合として同型である：

$$G \approx (G/H) \times H$$

証明 $p : G \to G/H$, $p(x) = xH$ を射影とし，$s : G/H \to G$ を p の１つの断面とする（p の断面はつねに存在するが一意的ではない）．写像

$$f : G \longrightarrow (G/H) \times H, \qquad g : (G/H) \times H \longrightarrow G \quad を$$

$$f(x) = (xH, (s(xH))^{-1}x), \qquad g(A, h) = s(A)h$$

と定義する．写像 f が定義されるためには $(s(xH))^{-1}x \in H$ を証明しなければならない．それは $p(s(xH)) = xH = p(x)$ であるから $s(xH)$ と x は同値である．したがって $(s(xH))^{-1}x \in H$ である．さて

$$gf(x) = g(xH, (s(xH))^{-1}x) = s(xH)(s(xH))^{-1}x = x$$

であるから $gf = 1$ である．また $A = aH (a = s(A))$ であるとすると

$$fg(A, h) = f(s(A)h) = f(ah) = (ahH, (s(ahH))^{-1}ah)$$
$$= (aH, (s(aH))^{-1}ah) = (A, a^{-1}ah) = (A, h)$$

となるから $fg = 1$ である．したがって $G \approx (G/H) \times H$ が証明された．

例 40． $\boldsymbol{Z}$ を整数全体のつくる加群とし，$2\boldsymbol{Z} = \{\cdots, -2, 0, 2, 4, \cdots\}$ を偶数全体の集合とすると，$2\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{Z}$ の部分加群である．$\boldsymbol{Z}_2 = \{0, 1\}$ は $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ の 1 つの代表系である（例 11）から命題 4 より

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_2 + 2\boldsymbol{Z}$$

となる．（$\boldsymbol{Z}$ は加群であるから命題 4 の $G = SH$ の代りに $G = S + H$ の記号を用いている）．$0 + 2\boldsymbol{Z} = 2\boldsymbol{Z} = \{\cdots, -2, 0, 2, 4, \cdots\}$, $1 + 2\boldsymbol{Z} = \{\cdots, -1, 1, 3, 5, \cdots\}$ であるから

$$\boldsymbol{Z} = \{\cdots, -2, 0, 2, 4, \cdots\} \cup \{\cdots, -1, 1, 3, 5, \cdots\} \qquad \text{(i)}$$

となる．これは $\boldsymbol{Z}$ を偶数と奇数の集合に類別すること（例 10）にほかならない．一方 $\boldsymbol{Z}_2 + 2n = \{2n, 2n+1\}$ であるから

$$\boldsymbol{Z} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{2n, 2n+1\}$$
$$= \cdots \cup \{-2, -1\} \cup \{0, 1\} \cup \{2, 3\} \cup \cdots \qquad \text{(ii)}$$

となる．$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_2 + 2\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{Z}_2$ に注目することと $2\boldsymbol{Z}$ に注目することにより，$\boldsymbol{Z}$ を (i), (ii) の 2 通りに類別することができることを示している．

例 41． $\boldsymbol{R}$ を実数全体のつくる加群とし，$\boldsymbol{Z}$ を整数全体の集合とすると，$\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{R}$ の部分加群である．$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ は「$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \boldsymbol{Z}$」の関係により $\boldsymbol{R}$ を類別した集合のことであり，かつ $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ の代表系として区間 $[0, 1)$ を選ぶことができた（例 20）．ゆえに命題 4 より

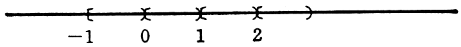
$$\boldsymbol{R} = [0, 1) + \boldsymbol{Z}$$

（命題 4 の積の記号を和の記号でかいている）を得る．$[0, 1) + n = \{n + t \mid 0 \leqq t < 1\} =$

$[n, n+1)$ であるから上式は $\boldsymbol{R}$ が区間 $[n, n+1)$ の和集合

$$\boldsymbol{R} = \cdots \cup [-1, 0) \cup [0, 1) \cup [1, 2) \cup \cdots$$

に類別されることを示している.



(3) 正規部分群と剰余群

定義　G を群とする. G の部分群 N が条件

（1）　G の任意の元 x に対して, $xNx^{-1} \subset N$

をみたすとき N は G の**正規部分群**であるという. (1) の条件はつぎの条件

（2）　G の任意の元 x に対して, $xN = Nx$

と同じであることが容易にわかる. また加群 M においては, M の任意の部分群 N は M の正規部分群であることに注意しておこう.

例 42.　群 G のすべての元 x と可換な G の元 c の全体の集合

$$C(G) = \{c \in G \mid cx = xc,\ x \in G\}$$

は G の正規部分群をつくっている. この群 $C(G)$ を G の**中心**という. G の中心 $C(G)$ に含まれる部分群は G の正規部分群である.

N が群 G の正規部分群とするとき, つぎのようにして G/N を再び群にすることができる. N が正規部分群であるから $(xN)(yN) = x(Ny)N = x(yN)N = xy(NN) = xyN$ となる. すなわち G/N の 2 つの剰余類 xN と yN の積は再び剰余類 xyN となる. さて G/N において, 2 つの剰余類 xN, yN の積を

$$(xN)(yN) = xyN$$

と定義すると G/N は群になる. 実際, 群 G/N の単位元は剰余類 N であり, 剰余類 xN の逆元は剰余類 $x^{-1}N$ である. このようにして得られた群 G/N を群 G の正規部分群 N による**剰余群**(または**商群**)という.

G を群, N を G の正規部分群とし $p: G \to G/N$, $p(x) = xN$ を射影とするとき, G/N における剰余類の積 $xNyN = xyN$ は

$$p(xy) = p(x)p(y)$$

のことにほかならない. これは射影 $p: G \to G/N$ が全射準同型写像であることを示している.

上述の逆命題である準同型定理を述べる前に準同型写像についてつぎの性質に注意して

おこう.

補題6. G, G' を群とし (e, e' をそれぞれの単位元とする), $f: G \to G'$ を準同型写像とするならばつぎの (1), (2) がなりたつ.

(1) $f(e) = e', f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

(2) $N = f^{-1}(e') = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$ は G の正規部分群である. (この N を準同型写像 $f: G \to G'$ の **核** という. f の核を $\mathrm{Ker}\, f$ で表わす).

証明 (1) $f(e)f(e) = f(ee) = f(e)$ であるから $f(e)^{-1}$ を掛けて $f(e) = e'$ を得る. また $f(x)f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(e) = e'$ となるがこれは $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ を示している.

(2) まず N が G の部分群であることを示そう. 実際, $a, b \in N$ とすると $f(a) = f(b) = e'$ であるから $f(a^{-1}b) = f(a^{-1})f(b) = f(a)^{-1}f(b) = e'^{-1}e' = e'$ となる. したがって $a^{-1}b \in N$ となり, N は G の部分群である. また任意の $x \in G$ と $a \in N$ に対して $f(xax^{-1}) = f(x)f(a)f(x^{-1}) = f(x)e'f(x)^{-1} = e'$ であるから $x^{-1}ax \in N$ である. これは N が G の正規部分群であることを示している.

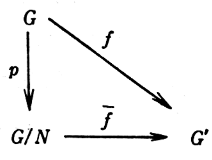
命題7. (**準同型定理**) G, G' を群とし, $f: G \to G'$ を全射準同型写像とする. このとき f の核を N とし, 写像 $\bar{f}: G/N \to G'$ を $\bar{f}(xN) = f(x)$ と定義すると $\bar{f}$ は群の同型写像となる. したがって G/N と G' は群として同型である:

$$G/N \cong G'$$

証明 $x_1, x_2 \in G$ に対して

$$x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$$

がなりたつ. 実際, $x_1 \sim x_2$ ならば $x_1^{-1}x_2 \in N$ である. ゆえに $f(x_1^{-1}x_2) = e', f(x_1)^{-1} f(x_2) = e'$ (補題6), したがって $f(x_1) = f(x_2)$ である. 逆はいまの計算を逆にたどるとよい. このことと f が全射であるという仮定より f は全単射 $\bar{f}$: $G/N \to G'$, $\bar{f}(xN) = f(x)$ を誘導する (補題2). この写像 $\bar{f}$ は準同型である. 実際, $\bar{f}((xN)(yN)) = \bar{f}(xyN) = f(xy) = f(x)f(y) = \bar{f}(xN)\bar{f}(yN)$ である, よって $\bar{f}$ は群の同型写像である.



例43. 例35における写像 $f: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}_2$, $f(2n) = 0$, $f(2n+1) = 1$ は全射準同型写像であった. f の核は $2\boldsymbol{Z}$ であるから, f は群としての同型 $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z} \cong \boldsymbol{Z}_2$ を誘導する.

例44. 例39における写像 $f: \boldsymbol{R} \to S^1$, $f(x) = e^{2\pi i x}$ は全射準同型写像であった. f の

核は $\boldsymbol{Z}$ であることが容易にわかる．ゆえに f は群としての同型 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \cong S^1$ を誘導する．

(4) 群の直積

定義 G_1, G_2 を2つの群とする（e_1, e_2 をそれぞれの単位元とする）．直積集合 $G_1 \times G_2$ の2つの元 (x_1, x_2), (y_1, y_2) の積を

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

と定義すると $G_1 \times G_2$ は群となる．実際，(e_1, e_2) が $G_1 \times G_2$ の単位元であり，(x_1, x_2) の逆元は (x_1^{-1}, x_2^{-1}) である．このようにして得られた群 $G_1 \times G_2$ を群 G_1, G_2 の **直積** という．

このとき射影 $p_1 : G_1 \times G_2 \to G_1$, $p_1(x_1, x_2) = x_1$ は全射準同型写像であり，p_1 の核 $G_2' = \{(e_1, x_2) \mid x_2 \in G_2\}$ は G_2 と群として同型である．かつ p_1 は群としての同型

$$(G_1 \times G_2)/G_2' \cong G_1$$

（命題7）を誘導する．（$p_2 : G_1 \times G_2 \to G_2$, $p_2(x_1, x_2) = x_2$ についても同様である）．また写像 $i_1 : G_1 \to G_1 \times G_2$, $i_1(x_1) = (x_1, e_2)$ は単射準同型写像であり，かつ $i_1(G_1) = G_1' = \mathrm{Ker}\, p_2$ である．（$i_2 : G_2 \to G_1 \times G_2$, $i_2(x_2) = (e_1, x_2)$ についても同様である）．

例 45. $\boldsymbol{R}$ を実数全体のつくる加群とし，$\boldsymbol{C}$ を複素数全体のつくる加群とする．このとき写像 $f : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ を

$$f(x + yi) = (x, y)$$

と定義するならば f は加群の同型写像である．したがって $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ は群として同型である：

$$\boldsymbol{C} \cong \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$$

M, N を加群とするとき，直積集合 $M \times N$ において和を

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

と定義すると $M \times N$ は加群をつくる．この加群 $M \times N$ を $M \oplus N$（また $M + N$ と表わすことも多い）で表わし，加群 M, N の **直和** という．加群の直積 $M \times N$ と直和 $M \oplus N$ とは記号の相違だけであって本質的な相違はない．したがって例45は（加群の構造のみを問題とするときには）

$$\boldsymbol{C} \cong \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}$$

とかいてもよいわけである．

§4. 体

群は乗法，除法の計算を自由に行なうことのできる集合であったが，さらに加減乗除の4則が定義されている体について述べよう.

定義 集合 K の任意の2つ元 x, y に対して，2つの算法 $x+y \in K, xy \in K$ が定義されていて

（1） $x+y=y+x$

（2） $x+(y+z)=(x+y)+z$

（3） K に0とかかれる特定の元が存在して，K の任意の元 x に対して $x+0=x$ がなりたつ.

（4） K の任意の元 x に対して，$x+(-x)=0$ をみたす K の元 $-x$ がある.

（5） $x(yz)=(xy)z$

（6） $x(y+z)=xy+xz, (y+z)x=yx+zx$ （分配法則）

（7） K に1とかかれる特定な元が存在して，K の任意の元 x に対して $x1=1x=x$ がなりたつ.

（8） K の0と異なる任意の元 x に対して，$xx^{-1}=x^{-1}x=1$ をみたす K の元 x^{-1} がある.

（9） $1 \neq 0$

をみたすとき K は**体**である（または K は**体**をつくる）という．さらに

(10) $xy=yx$

をみたすとき K を**可換体**という.

例 46. 実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ は可換体である．体 $\boldsymbol{R}$ を**実数体**という.

例 47. 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ は可換体である．体 $\boldsymbol{C}$ を**複素数体**という.

例 48. 4元数全体の集合 $\boldsymbol{H}$ は体をつくっている．体 $\boldsymbol{H}$ を**4元数体**という.

4元数について説明しておこう．**4元数**とは $x=a1+bi+cj+dk\,(a, b, c, d \in \boldsymbol{R})$ と1通りに表わされる数で，$\boldsymbol{H}$ において i, j, k の間の積を

$$i^2=j^2=k^2=-1$$

$$ij=-ji=k,\ jk=-kj=i,\ ki=-ik=j$$

と定義する．また1は $\boldsymbol{H}$ の単位元であるとし，また

$$(a1)i=i(a1)=ai$$

$$(a1)j=j(a1)=aj \qquad a \in \boldsymbol{R}$$

$$(a1)k = k(a1) = ak$$

とする（以下 $a1$ $(a \in \boldsymbol{R})$ を単に a で表わす）．さらに分配法則がなりたつものとして $\boldsymbol{H}$ に積を導入する．このとき $\boldsymbol{H}$ は体となるが $ij = -ji$ が示すように $\boldsymbol{H}$ は可換体ではない．4元数 $x = a + bi + cj + dk$ に対して，$\bar{x} = a - bi - cj - dk$ を x の **共役元** といい，また $\mathrm{Re}\, x = a$ を x の **実部** という．共役元と実部に関して

$$\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}, \qquad \overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$$

$$\mathrm{Re}(xy) = \mathrm{Re}(yx)$$

がなりたつ．2つの4元数 $x = a + bi + cj + dk$ と $x' = a' + b'i + c'j + d'k$ の **内積** (x, x') を

$$(x, x') = aa' + bb' + cc' + dd'$$

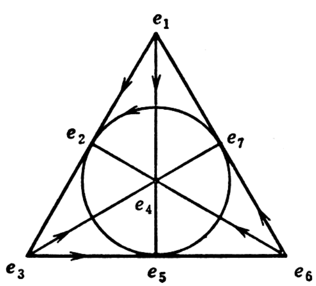
で，x の **絶対値**（**長さ**ともいう）$|x|$ を

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

で定義する．このとき $|xy| = |x||y|$ がなりたつ．また $\bar{x}x = x\bar{x} = |x|^2$ がなりたつので，0でない4元数 x の逆元 x^{-1} は $\dfrac{\bar{x}}{|x|^2}$ で与えられる．$a \in \boldsymbol{R}$ を $a = a + 0i + 0j + 0k \in \boldsymbol{H}$ と同一視して $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{H}$ とみなす（$\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{H}$ の部分体となる）．$x \in \boldsymbol{H}$ が $x \in \boldsymbol{R}$ であるための条件は $\bar{x} = x$ である．また $c \in \boldsymbol{H}$ が任意の $x \in \boldsymbol{H}$ に対して $cx = xc$ であれば $c \in \boldsymbol{R}$ である（逆も正しい）ことに注意しておこう．また $a + bi \in \boldsymbol{C}$ を $a + bi = a + bi + 0j + 0k \in \boldsymbol{H}$ と同一視して $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{H}$ とみなす（$\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{H}$ の部分体となる）ことにする．

例 49.　Cayley 数全体の集合 $\mathfrak{C}$ を **Cayley 数体**† という．

Cayley 数（**8元数**ともいう）を説明しよう．$e_0 = 1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ を基とする実数体 $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間（§6(1)）を $\mathfrak{C}$ とする，すなわち Cayley 数 x は1通りに $x = \sum_{i=0}^{7} x_i e_i$ $(x_i \in \boldsymbol{R})$ と表わされている．$\mathfrak{C}$ の基の間の積をつぎのように定める．左図において左の線上の e_1, e_2, e_3 の間では $e_1e_2 = e_3$, $e_2e_3 = e_1$, $e_3e_1 = e_2$ と定義する．他の線上でもこれと同様に定義する．たとえば $e_1e_6 = e_7$, $e_4e_7 = e_3$ 等である．（ただし e_2, e_5, e_7 も同一直線上にあるとみなす．たとえば $e_5e_7 = e_2$ である）．さらに $e_0 = 1$ は積の単位元とし，



† $\mathfrak{C}$ は体ではないので普通 Cayley 代数とよばれているが，本書では体ということにした．

$$e_i^2=-1\quad(i\neq 0),\qquad e_ie_j=-e_je_i\quad(i\neq j,\ i\neq 0,\ j\neq 0)$$

$$(a1)e_i=e_i(a1)=ae_i,\qquad a\in \boldsymbol{R}$$

とし，さらに分配法則がなりたつとすると $\mathfrak{C}$ に積が定義される．(以下 $a1$ ($a\in\boldsymbol{R}$) を単に a で表わす)．$\mathfrak{C}$ の元 $x=x_0+\sum_{i=1}^{7}x_ie_i$ に対して $\bar{x}=x_0-\sum_{i=1}^{7}x_ie_i$ を x の**共役元**といい，また $\mathrm{Re}\,x=x_0$ を x の**実部**という．実部に関しては

$$\mathrm{Re}(xy)=\mathrm{Re}(yx),\qquad \mathrm{Re}(x(yz))=\mathrm{Re}((xy)z)$$

がなりたつ．$\mathfrak{C}$ の2つの元 $x=\sum_{i=0}^{7}x_ie_i,\ y=\sum_{i=0}^{7}y_ie_i$ の**内積** (x,y) を $\sum_{i=0}^{7}x_iy_i$ で，x の**絶対値**(**長さ**ともいう)$|x|$ を $\sqrt{(x,x)}$ で定義する．0でない Cayley 数 x に対して $\dfrac{\bar{x}}{|x|^2}$ を x^{-1} とおくと $xx^{-1}=x^{-1}x=1$ がなりたつ．そして $\mathfrak{C}$ においては体の定義の (1)-(4), (6)-(9) がなりたつが可換法則 (10) と結合法則 (5) はなりたたない．実際，$e_1e_2=-e_2e_1,\ (e_1e_2)e_4=-e_1(e_2e_4)$ である．特に結合法則がなりたたないことは Cayley 数の取扱いを大そう面倒なものにしているが，結合法則にかわるものとしてつぎの諸公式がある．まづ

$$|xy|=|x||y|$$

がなりたつ．以下の公式は上の式から導かれるが，その証明は付録 (1) で与えておいた．

1. $(ax,ay)=(a,a)(x,y)=(xa,ya)$

2. $(ax,by)+(bx,ay)=2(a,b)(x,y)$

3. $(ax,y)=(x,\bar{a}y),\ (xa,y)=(x,y\bar{a})$

4. $\bar{\bar{x}}=x,\ \overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y},\ \overline{xy}=\bar{y}\bar{x}$

5. $(x,y)=(y,x)=\dfrac{1}{2}(x\bar{y}+y\bar{x})=\dfrac{1}{2}(\bar{x}y+\bar{y}x)$

$x\bar{x}=\bar{x}x=|x|^2$

6. $a(\bar{a}x)=(a\bar{a})x,\qquad a(x\bar{a})=(ax)\bar{a},\qquad x(a\bar{a})=(xa)\bar{a}$

$a(ax)=(aa)x,\qquad a(xa)=(ax)a,\qquad x(aa)=(xa)a$

7. $\bar{b}(ax)+\bar{a}(bx)=2(a,b)x=(xa)\bar{b}+(xb)\bar{a}$

8. $a(bx)+b(ax)=(ab)x+(ba)x$

$(xb)a+(xa)b=x(ba)+x(ab)$

9. $(ax)y+x(ya)=a(xy)+(xy)a$

$x(ay)+y(ax)=(xa)y+(ya)x$

10. $(ax)(ya)=a(xy)a$

$e_0=1, e_1, e_2, \cdots, e_7$ は $\mathfrak{C}$ の正規直交基（$(e_i, e_j)=\delta_{ij}$[†]）であるが，$1, a_1, a_2, \cdots, a_7$ を $\mathfrak{C}$ の任意の正規直交基（$(a_i, a_j)=\delta_{ij}$）とするとき

11.1 $a_i(a_jx)=-a_j(a_ix) \qquad (i\neq j)$

特に $\qquad a_ia_j=-a_ja_i \qquad (i\neq j)$

11.2 $a_i(a_ix)=-x$

特に $\qquad a_ia_i=-1$

11.3 $a_i(a_ja_k)=a_j(a_ka_i)=a_k(a_ia_j) \qquad (i, j, k$ は異なる)

がなりたつ.

$a+bi+cj+dk\in \boldsymbol{H}$ を $a+be_1+ce_2+de_3\in\mathfrak{C}$ と同一視すると $\boldsymbol{H}\subset\mathfrak{C}$ とみなせる（$\boldsymbol{H}$ は $\mathfrak{C}$ の部分体である）. よって $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{H}\subset\mathfrak{C}$ である.

本書で K とかくときはことわりない限り $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$（時には $\mathfrak{C}$）のいずれか1つを表わすことにする. また $d=d(K)$ で K の $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間としての次元（35頁）を表わすものとする. すなわち $d(\boldsymbol{R})=1, d(\boldsymbol{C})=2, d(\boldsymbol{H})=4, d(\mathfrak{C})=8$ とする.

体 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}, \mathfrak{C}$ は似た性質（たとえば x は共役元 $\bar{x}$ や長さ $|x|$ をもち，内積 (x, y) が定義されている）をもっている反面，異なる性質ももっている. 結合法則をみたさない $\mathfrak{C}$ を除いても，$\boldsymbol{H}$ が可換体でないことは $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ と本質的に異なる性質である. 複素数を係数にもついかなる代数方程式も複素数の範囲で必らず根をもつという事実は複素数体 $\boldsymbol{C}$ のもつ最良の性質のようである. たとえば方程式 $x^2+1=0$ は $\boldsymbol{R}$ では根をもたず，$\boldsymbol{C}$ ではちょうど2個の根 $i, -i$ をもち，$\boldsymbol{H}$ では無数の根をもっている.（$\pm i, \pm j, \pm k$ は根であり，a が根であれば cac^{-1} も根である）. $\boldsymbol{R}$ 上の有限次元ベクトル空間で（結合法則を必ずしも仮定しない）体をなすものは $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}, \mathfrak{C}$ に限るかという予想は位相幾何学における重大な関心事であったが，内積が定義されているという仮定のもとに H. Freudenthal (Oktaven, Ausnahmengruppen und Oktavengeometrie, Math Inst. Rijs univ. to Utrecht, 1951) が，一般の場合に J. F. Adams (On the non-existence of elements of Hopf invariant one, Bull. Am. Math. Soc., 64, 1958) が肯定的に解決した.

§5. 古 典 群

群の重要な例である古典群の定義を与えよう. Cayley 数体を用いても古典群と同様な考

[†] 記号 δ_{ij} は **Kronecker の記号**と呼ばれ，その意味はつぎの通りである：$\delta_{ii}=1, \delta_{ij}=0$ $(i\neq j)$.

察ができるが，そのことについては付録で少し述べておいた（付録(4)）.

K で体 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ のいずれか1つを表わすものとする．K の元を成分にもつ n 次の行列 A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

（この A を略して $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1,\cdots,n}$ または $A = \left(a_{ij}\right)$ とかく）の全体の集合を $M(n, K)$ で表わす．よく知られているように $M(n, K)$ の2つの行列 A, B に対して行列の積 $AB \in M(n, K)$ が定義される．（$A = \left(a_{ij}\right)$, $B = \left(b_{ij}\right)$ ならば AB の (i, j)-成分は $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ である）．$E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$[†] とおくと E は $M(n, K)$ における積の単位元である，すなわち $M(n, K)$ の任意の行列 A に対して $AE = EA = A$ がなりたつ．この E を n 次の**単位行列**という．行列 $A \in M(n, K)$ に対して $AB = BA = E$ をみたす行列 $B \in M(n, K)$ が存在するとき A を**正則行列**という．この B は A に対して1意に定まるので，B を A^{-1} で表わし，A の**逆行列**という．一般に2つの行列 $A, B \in M(n, K)$ に対して，$AB = E$ がなりたつとき $BA = E$ となる（証明は補題10）ので行列 A が正則であるという定義を単に A に対して $AB = E$ をみたす行列 $B \in M(n, K)$ が存在するとしてもよいことに注意しておこう．$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ ならば $A \in M(n, K)$ に対して**行列式** $\det A$ が定義される．

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma a_{1i_1} \cdots a_{ni_n}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1, & \cdots, & n \\ i_1, & \cdots, & i_n \end{pmatrix} \tag{i}$$

そして $\det A \neq 0$ は A が正則であるための必要十分条件であり，正則行列 A の逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & A_{ji} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ i \\ \\ \end{matrix} \quad (\text{j 列}) \tag{ii}$$

で与えられる．ここに A_{ij} は行列 A から i 行，j 列を除いた $n-1$ 次の行列の行列式に符号 $(-1)^{i+j}$ をつけた数である．しかし $K = \boldsymbol{H}$ のときには $\boldsymbol{H}$ が可換体ではないので $A \in$

[†] $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ とかくとき何もかいてない所の成分は0であるとする．

$M(n, \boldsymbol{H})$ の行列式は定義されない．（たとえ（i）式で行列式を定義したとしても，可換体のときなりたつような行列式の性質はほとんど成立しない）．したがって正則行列 $A \in M(n, \boldsymbol{H})$ の逆行列 A^{-1} は勿論（ii）の形には表わせないわけである．

行列 $A = i\begin{pmatrix} & \overset{j}{\vdots} & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \in M(n, K)$ に対して ${}^tA, A^* \in M(n, K)$ をそれぞれ

$$ {}^tA = i\begin{pmatrix} & \overset{j}{\vdots} & \\ \cdots & a_{ji} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}, \qquad A^* = i\begin{pmatrix} & \overset{j}{\vdots} & \\ \cdots & \bar{a}_{ji} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} $$

と定義すると任意の $A, B \in M(n, K)$ に対して

$$(AB)^* = B^*A^*$$

がなりたつ．また $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ のときには

$${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$$

もなりたつ．

定義 $GL(n, \boldsymbol{R}) = \{A \in M(n, \boldsymbol{R}) \mid \det A \neq 0\}$ を**実一般線形群**という．

$GL(n, \boldsymbol{C}) = \{A \in M(n, \boldsymbol{C}) \mid \det A \neq 0\}$ を**複素一般線形群**という．

$GL(n, \boldsymbol{H}) = \{A \in M(n, \boldsymbol{H}) \mid A$ は正則$\}$ を**4元数一般線形群**という．

$SL(n, \boldsymbol{R}) = \{A \in M(n, \boldsymbol{R}) \mid \det A = 1\}$ を**実特殊線形群**という．

$SL(n, \boldsymbol{C}) = \{A \in M(n, \boldsymbol{C}) \mid \det A = 1\}$ を**複素特殊線形群**という．

$O(n) = \{A \in M(n, \boldsymbol{R}) \mid A{}^tA = E\}$ を**直交群**という．

$U(n) = \{A \in M(n, \boldsymbol{C}) \mid AA^* = E\}$ を**ユニタリ群**という．

$Sp(n) = \{A \in M(n, \boldsymbol{H}) \mid AA^* = E\}$ を**シンプレクティック群**という．

$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$ を**回転群**（または**特殊直交群**）という．

$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$ を**特殊ユニタリ群**という．

これらの集合は行列の積に関して群をつくっている．例として $U(n)$ が群であることを証明しておこう．実際，$A, B \in U(n)$ とすると $AA^* = BB^* = E$ であるから $(AB)(AB)^* = ABB^*A^* = AEA^* = AA^* = E$，ゆえに $AB \in U(n)$ である．$A^*A = AA^* = E$ であるから $A^{-1} = A^*$ である．しかるに $A^*A^{**} = A^*A = E$ であるから $A^{-1} = A^* \in U(n)$ である，よって $U(n)$ は群である．他も同様に証明できる．

$GL(n, K)$ で $GL(n, \boldsymbol{R})$, $GL(n, \boldsymbol{C})$, $GL(n, \boldsymbol{H})$ の，$SL(n, K)$ で $SL(n, \boldsymbol{R})$, $SL(n,$

C) の，$G(n, K)$ で $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$ の，$SG(n, K)$ で $SO(n)$, $SU(n)$ のいずれか 1 つを表わすこととする．またこれらの群を総称して**古典群**という．

$n=1, 2$ のときの古典群を定義にもとずいて調べてみよう．

例 50.　$SO(1)=\{1\}$, $SU(1)=\{1\}$, $O(1)=S^0=\{-1, 1\}$ である．

例 51.　$O(2)$, $SO(2)$ を調べるためにつぎの計算を試みよう．$A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O(2)$ は $A^tA=E$ をみたすから

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．ゆえに

$$\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ba+dc & b^2+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．したがって

$$a^2+c^2=1, \quad b^2+d^2=1, \quad ab+cd=0$$

がなりたつ．初めの 2 つの式から

$$a=\sin\varphi,\ c=\cos\varphi\ ;\ b=\sin\theta,\ d=\cos\theta$$

とおくことができるが，これらを第 3 の式に代入すると

$$\sin\varphi\sin\theta+\cos\varphi\cos\theta=0$$

$$\cos(\varphi-\theta)=0$$

を得る．したがって $\varphi=\theta+\dfrac{\pi}{2}(\mathrm{mod}\ 2\pi)$ または $\varphi=\theta-\dfrac{\pi}{2}(\mathrm{mod}\ 2\pi)$ となる．ゆえに

$$a=\cos\theta,\ c=-\sin\theta \quad \text{または} \quad a=-\cos\theta,\ c=\sin\theta$$

となる．よって $O(n)$ の元は

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad B=\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

のいずれかの形の行列である．A は $\det A=1$ であるから $A \in SO(2)$ であり，B は $\det B=-1$ であるから $B \notin SO(2)$ である．したがって

$$SO(2)=\left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \boldsymbol{R}\right\}$$

であることがわかった．写像 $f: SO(2) \to S^1=\{x \in \boldsymbol{C} \mid |x|=1\}$ を

$$f\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=e^{i\theta}$$

と定義すると明らかに f は全単射である．さらに三角関数の加法定理を用いると

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$

となるから $A, A' \in SO(2)$ に対して $f(AA') = f(A)f(A')$ がなりたち，f が準同型写像であることがわかる．すなわち f は群の同型写像である．したがって $SO(2)$ と S^1 は群として同型である：

$$SO(2) \cong S^1$$

$SO(2)$ は明らかに $O(2)$ の部分群である．B の形の行列は

$$B = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と表わされるので $O(2)$ は

$$O(2) = SO(2) \cup \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} SO(2)$$

と類別される．これは群 $O(2)$ の部分群 $SO(2)$ による類別にほかならない．$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ の 2 つの行列からなる集合を S^0 で表わすと S^0 は $O(2)/SO(2)$ の代表系である：$O(2)/SO(2) \approx S^0$. ゆえに命題 4 より $O(2)$ は集合として

$$O(2) \approx S^0 \times SO(2) \approx S^0 \times S^1$$

となる．

例 52. $U(1)$ は群 $S^1 = \{x \in \boldsymbol{C} \mid |x| = 1\}$ にほかならない：$U(1) \cong S^1$.

例 53. $S^3 = \{x \in \boldsymbol{H} \mid |x| = 1\}$ は（積に関して）群をつくっている．そして $Sp(1)$ は群 S^3 にほかならない：$Sp(1) \cong S^3$.

例 54. $SU(2) \cong Sp(1) \cong S^3$ である．これを定義にもとずいて証明してみよう．$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SU(2)$は $AA^* = E$ をみたすから

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．ゆえに

$$\begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & a\bar{b} + c\bar{d} \\ b\bar{a} + d\bar{c} & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって

$$|a|^2 + |c|^2 = 1 \cdots (\mathrm{i}), \quad |b|^2 + |d|^2 = 1 \cdots (\mathrm{ii}), \quad a\bar{b} + c\bar{d} = 0 \cdots (\mathrm{iii})$$

がなりたつ．さらに $\det A = 1$ より $ad - bc = 1 \cdots (\mathrm{iv})$ である．(iii) $\times\, b$ + (iv) $\times\, \bar{d}$ をつくって（i）を用いると $a = \bar{d}$ となり，(iii) $\times\, d$ − (iv) $\times\, \bar{b}$ をつくって (ii) を用い

ると $c=-\bar{b}$ となる．したがって $A\in SU(2)$ は

$$A=\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad |a|^2+|b|^2=1$$

の形をしていることがわかる．逆にこのような形の行列は $SU(2)$ に属している．写像 f：$SU(2)\to Sp(1)$ を

$$f\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}=a+jb$$

と定義すると明らかに f は全単射である．また

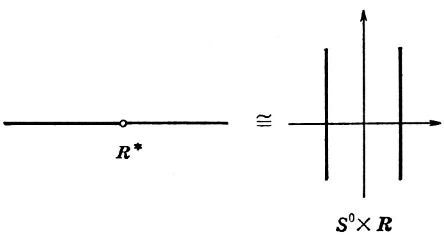
$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & -\bar{b}' \\ b' & \bar{a}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'-\bar{b}b' & -a\bar{b}'-\bar{b}\bar{a}' \\ ba'+\bar{a}b' & -b\bar{b}'+\bar{a}\bar{a}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'-\bar{b}b' & -\overline{ba'+\bar{a}b'} \\ ba'+\bar{a}b' & \overline{aa'-\bar{b}b'} \end{pmatrix}$$

であり，一方 $(a+jb)(a'+jb')=aa'+jba'+ajb'+jbjb'=aa'+jba'+j\bar{a}b'+\bar{b}jjb'=(aa'-\bar{b}b')+j(ba'+\bar{a}b')$ となるから $A, A'\in SU(2)$ に対して $f(AA')=f(A)f(A')$ がなりたち，f は準同型写像である．以上で f が群の同型写像であることがわかった．したがって $SU(2)$ と $Sp(1)$ は群として同型である：$SU(2)\cong Sp(1)$.

例 55. $GL(1, \boldsymbol{R})\cong \boldsymbol{R}^*\cong S^0\times\boldsymbol{R}$ である．ここに $\boldsymbol{R}^*=\boldsymbol{R}-\{0\}$, $S^0=\{-1, 1\}$ とする．($\boldsymbol{R}^*$, S^0 は群であり $\boldsymbol{R}$ は加群である(例 30, 29, 27))．$GL(1, \boldsymbol{R})\cong\boldsymbol{R}^*$ は定義そのままである．$\boldsymbol{R}^*$ は実数直線から原点を除いた図形であるから直観的に 2 本の直線 $S^0\times\boldsymbol{R}$ である (例 7)．これを証明するために写像 f：$\boldsymbol{R}^*\to S^0\times\boldsymbol{R}$ を

$$f(x)=(\operatorname{sgn}x,\ \log|x|)^{\dagger}$$

と定義すると f は全単射である．(f の逆写像 g：$S^0\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^*$ は $g(a, x)=ae^x$ である)．さらに f は準同型写像である．実際,



$$f(xy)=(\operatorname{sgn}xy,\ \log|xy|)=(\operatorname{sgn}x\operatorname{sgn}y,\ \log|x|+\log|y|)$$
$$=(\operatorname{sgn}x,\ \log|x|)(\operatorname{sgn}y,\ \log|y|)=f(x)f(y)$$

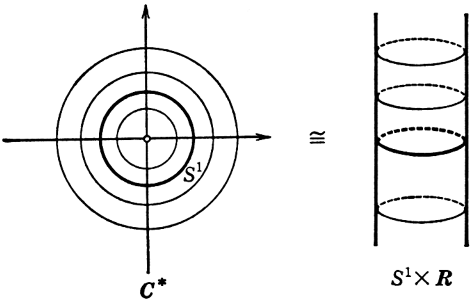
である．したがって $\boldsymbol{R}^*$ と $S^0\times\boldsymbol{R}$ は群として同型である：$\boldsymbol{R}^*\cong S^0\times\boldsymbol{R}$.

例 56. $GL(1, \boldsymbol{C})\cong\boldsymbol{C}^*\cong S^1\times\boldsymbol{R}$ である．ここに $\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}-\{0\}$, $S^1=\{x\in\boldsymbol{C}\mid |x|=1\}$ とする．($\boldsymbol{C}^*$, S^1 は群であり，$\boldsymbol{R}$ は加群である (例 32, 33, 27))．$GL(1, \boldsymbol{C})\cong$

† sgn：$\boldsymbol{R}^*\to S^0$ の定義は，$x>0$ ならば $\operatorname{sgn}x=1$, $x<0$ ならば $\operatorname{sgn}x=-1$ である．

$\boldsymbol{C}^*$ は定義そのままである．0でない複素数 α は $\alpha=re^{i\theta}$ $(r>0)$ と表わされることを用いて，写像 $f:\boldsymbol{C}^*\to S^1\times\boldsymbol{R}$ を

$$f(re^{i\theta})=(e^{i\theta},\ \log r)$$



と定義すると f は全単射である．(f の逆写像 $g:S^1\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}^*$ は $g(a, x)=e^xa$ である)．さらに f は準同型写像である．実際，$\alpha=re^{i\theta}$, $\beta=se^{i\varphi}$ に対して

$$\begin{aligned} f(\alpha\beta)&=f(re^{i\theta}se^{i\varphi})\\ &=f(rse^{i(\theta+\varphi)})\\ &=(e^{i(\theta+\varphi)},\ \log rs)\\ &=(e^{i\theta}e^{i\varphi},\ \log r+\log s)=(e^{i\theta},\ \log r)(e^{i\varphi},\ \log s)\\ &=f(re^{i\theta})f(se^{i\varphi})=f(\alpha)f(\beta) \end{aligned}$$

である．したがって $\boldsymbol{C}^*$ と $S^1\times\boldsymbol{R}$ は群として同型である：$\boldsymbol{C}^*\cong S^1\times\boldsymbol{R}$.

$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とし，写像 $f:M(n, K)\to K$ を $f(A)=\det A$ と定義する．本書ではこの写像 f を det で表わすことにする．

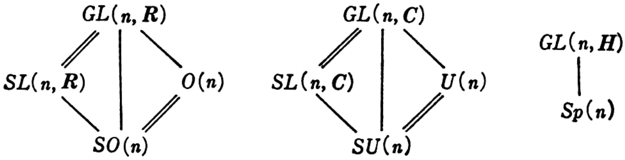
定理 1.　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とする．写像 $\det: GL(n, K)\to K^*=K-\{0\}$, $\det: G(n, K)\to S_K{}^0=\{x\in K\,|\,|x|=1\}$ はつぎの群としての同型を誘導する．

$$GL(n, \boldsymbol{R})/SL(n, \boldsymbol{R})\cong\boldsymbol{R}^*\qquad GL(n, \boldsymbol{C})/SL(n, \boldsymbol{C})\cong\boldsymbol{C}^*$$
$$O(n)/SO(n)\cong S^0\qquad U(n)/SU(n)\cong S^1$$

証明　$A\in GL(n, K)$ ならば $\det A\neq 0$ であるから，確かに det は写像 $\det: GL(n, K)\to K^*$ を定義している．行列式の性質 $\det(AB)=\det A\det B$ は det が準同型写像であることを示している．det は全射である．実際，$a\in K^*$ に対して行列 $A=\begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$ をつくると $A\in GL(n, K)$ であって，かつ $\det A=a$ である．det の核 $=\det^{-1}(1)$ は明らかに $SL(n, K)$ であるから準同型定理（命題 7）より $GL(n, K)/SL(n, K)\cong K^*$ を得る．つぎに $A\in G(n, K)$ ならば $\det A\in S_K{}^0$ であることを示そう．実際，$AA^*=E$ の行列式をとると $\det(AA^*)=1$, $\det A\,\overline{\det {}^tA}=1$ となるが，一般に $\det {}^tA=\det A$ であるから $\det A\,\overline{\det A}=1$，すなわち $|\det A|=1$ となり $\det A\in S_K{}^0$ である．$\det: G(n, K)\to S_K{}^0$ は準同型写像であるが全射であることも $GL(n, K)$ のときと同様に証明でき

る．この det の核は明らかに $SG(n, K)$ であるから準同型定理（命題7）より $G(n, K)/SG(n, K) \cong S_K{}^0$ を得る．

群 G の部分群 $H_1, H_2, \cdots$ において，H_2 が H_1 の部分群であるとき H_2 を H_1 の下にかいて線で結び，H_2 が H_1 の正規部分群であるとき2重線で結ぶと下の図を得る．



§6. K-加群と Hermite 行列

射影空間，古典群の性質を調べるための準備として Hermite 行列および直交行列，ユニタリ行列，シンプレクティック行列の性質をもう少し詳しく調べておく．そのためにベクトル，ベクトル空間，固有値などいわゆる線形代数の基礎知識をまとめておこう．

（I） K-加群

$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．しかし K を一般の体としてもよい．

定義　集合 V の任意の2つの元 x, y に対して和 $x+y \in V$ が定義されこの和に関して V は加群であり，さらに V の任意の元 x と K の任意の元 λ に対して V の元 $x\lambda$ が1意に定まり

（1）　$x(\lambda\mu) = (x\lambda)\mu$

（2）　$x(\lambda+\mu) = x\lambda + x\mu$　　　　$x, y \in V,\quad \lambda, \mu \in K$

（3）　$(x+y)\lambda = x\lambda + y\lambda$

（4）　$x1 = x$　　　　　　　　　　$1 \in K$

がなりたつとき V を **K-右加群**，または体 **K の上の右ベクトル空間**という．

同様に加群 V の任意の元 x と体 K の任意の元 λ に対して V の元 λx が1意に定まり

（1）　$(\mu\lambda)x = \mu(\lambda x)$

（2）　$(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$

（3）　$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

（4）　$1x = x$

がなりたつとき V を **K-左加群**，または体 **K の上の左ベクトル空間**という．

さらに加群 V の任意の元 x と可換体 K の任意の元 λ に対して V の元 $x\lambda$, λx が定義されていて, $x\lambda = \lambda x$ であり, かつ V が K-右加群であるとき（このとき V は K-左加群にもなる）V を単に **K-加群**, または可換体 **K の上のベクトル空間**という.

K-右加群 V の部分集合 W がつぎの2つの条件

（1） $x, y \in W$ ならば $x - y \in W$

（2） $x \in W, \lambda \in K$ ならば $x\lambda \in W$

をみたすとき W を V の**部分 K-右加群**という. 部分 K-右加群 W はそれ自身 K-右加群である.（部分 K-左加群, 部分 K-加群も同様に定義できる).

K の元を成分にもつ n 次元ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$[†] 全体の集合を K^n で表わす. 2つのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ の和を $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ と定義すると K^n は加群をつくる. つぎにベクトル $\boldsymbol{x}$ と K の元 λ に対して $\boldsymbol{x}\lambda$, $\lambda\boldsymbol{x}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix} x_1\lambda \\ \vdots \\ x_n\lambda \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$ と定義するならば, K^n は K-右加群になると同時に K-左加群にもなる. $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ のときは $\boldsymbol{x}\lambda = \lambda\boldsymbol{x}$ がなりたつから K^n は K-加群であるが, $K = \boldsymbol{H}$ のときには $\boldsymbol{x}\lambda$ と $\lambda\boldsymbol{x}$ が等しくないので $\boldsymbol{H}^n$ を $\boldsymbol{H}$-加群とみるとき右, 左の区別が必要となる. 本書ではことわりのない限り $\boldsymbol{H}^n$ を $\boldsymbol{H}$-右加群とみることにする. しかし $\boldsymbol{H}$ のときでも λ が実数ならば $\boldsymbol{x}\lambda = \lambda\boldsymbol{x}$ がなりたっていることに注意しよう. すなわち $\boldsymbol{H}^n$ を $\boldsymbol{R}$-加群とみなすことができるのである.

K^n のときと同様に2つの行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M(n, K)$ に対して和を $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ と定義すると $M(n, K)$ は加群をつくり, さらに $A \in M(n, K)$ と $\lambda \in K$ に対して $A\lambda = (a_{ij}\lambda)$, $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ と定義すると $M(n, K)$ は K-右加群になると同時に K-左加群にもなる.

V, W を2つの K-右加群とする. 写像 $f: V \to W$ が

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad x, y \in V$$

$$f(x\lambda) = f(x)\lambda \qquad \lambda \in K$$

をみたすとき f を **K-準同型写像**という. K-準同型写像 $f: V \to W$ が全単射である

[†] ベクトル $\boldsymbol{x}$ の左から行列 A を掛けたいのでベクトルはすべて縦ベクトルを用いることにする. しかし紙面をとるので横ベクトルにかくこともある.

とき f を **K-同型写像**という．2つの K-右加群 V と W の間に K-同型写像 f: $V\to W$ が存在するとき V と W は **K-右加群として同型**であるという．補題3と同様にすると，2つの K-右加群 V, W が K-右加群として同型であるための条件は $gf=1_V$, $fg=1_W$ をみたす2つの K-準同型写像 $f:V\to W$, g: $W\to V$ が存在することであることがわかる．

例 57. 写像 $f: K^{n-1}\to K^n$ を

$$f(x_1,\cdots,x_{n-1})=(x_1,\cdots,x_{n-1},0)$$

と定義するならば f は単射 K-準同型写像である．したがって $(x_1,\cdots,x_{n-1})\in K^{n-1}$ を $(x_1,\cdots,x_{n-1},0)\in K^n$ と同一視することにより，K^{n-1} を K^n の部分 K-右加群とみなすことができる．このとき部分 K-右加群の列

$$0\subset K\subset K^2\subset\cdots\subset K^{n-1}\subset K^n$$

を得る．

例 58. 写像 $f: M(n,K)\to K^{n^2}$ を

$$f\left(a_{ij}\right)=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1},a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2},\cdots,a_{1n},\cdots,a_{nn})$$

と定義するならば f は K-同型写像である．したがって $M(n,K)$ は K^{n^2} と K-右加群として同型である．

(2) K-加群の次元

K を体とし，V を K-右加群とする．V の元 $u_1,\cdots,u_n$ に対して

$$u_1\lambda_1+\cdots+u_n\lambda_n=0 \qquad (\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in K)$$

がなりたつのは $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$ に限るとき，$u_1,\cdots,u_n$ は**右1次独立**[†]であるという．V の元 $u_1,\cdots,u_n$ が右1次独立でないとき，すなわち，すべては0でない $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in K$ が存在して

$$u\lambda_1+\cdots+u_n\lambda_n=0$$

となるとき，$u_1,\cdots,u_n$ は**右1次従属**であるという．

定義 K-右加群 V が **n 次元**であるとはつぎの2つの条件

(1) V に n 個の右1次独立な元 $u_1,\cdots,u_n$ が存在する．

(2) V の任意の元 x は $x=u_1\lambda_1+\cdots+u_n\lambda_n$ $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in K)$ と表わされる．

[†] K-左加群 V においても同様に V の元 $u_1,\cdots,u_n$ の左1次独立を定義することができる．しかし右1次独立と左1次独立とは必ずしも一致しない．実際，$\boldsymbol{H}^2$ の2つのベクトル $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}j\\k\end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{H}$-左加群 $\boldsymbol{H}^2$ では左1次独立であるが $\boldsymbol{H}$-右加群 $\boldsymbol{H}^2$ においては右1次独立ではない．

をみたすことである.（$V=\{0\}$ のときまたそのときに限り V の次元は0であると定義する）. この $u_1, \cdots, u_n$ を V の **基** という. n 次元 K-右加群 V の任意の右1次独立な n 個の元 $v_1, \cdots, v_n$ は V の基である（すなわち (2) をみたす）ことをつぎの命題9で示そう.（実はこのことが証明されて始めて K-右加群の次元の定義が妥当であることがわかる）.

補題8. n 次元 K-右加群 V においては, $n+1$ 個（以上）の元は右1次従属である.

証明 n に関する帰納法で証明しよう. V を1次元 K-右加群とするとき, V の2つの元 x_1, x_2 はある元 $u\in V$ により,

$$x_1 = u\lambda_1, \qquad x_2 = u\lambda_2$$

と表わされる. $\lambda_1=0$ のときは $x_1=0$ であるから x_1, x_2 は右1次従属である（$x_1 1+x_2 0=0$）. $\lambda_1\neq 0$ のときには

$$x_1\lambda_1^{-1}\lambda_2 + x_2(-1) = 0$$

となるから, このときも x_1, x_2 は右1次従属である. よって1次元 K-右加群に対して補題はなりたつ. つぎに $n-1$ 次元 K-右加群においては補題がなりたつと仮定して, n 次元 K-右加群 V の $n+1$ 個の元 $x_1, \cdots, x_{n+1}$ が右1次従属であることを示そう. V は n 次元であるから, 右1次独立な元 $u_1, \cdots, u_n\in V$ が存在して

$$x_i = u_1\lambda_{1i} + \cdots + u_n\lambda_{ni}, \qquad i=1, \cdots, n+1 \quad (\lambda_{ji}\in K)$$

と表わせる. もしすべての λ_{ji} が0であるならば明らかに $x_1, \cdots, x_{n+1}$ は右1次従属であるので, λ_{ji} のうちの1つは0でないと仮定してよいから, いま $\lambda_{11}\neq 0$ としておく.

$$W = \{u_2\lambda_2 + \cdots + u_n\lambda_n \mid \lambda_2, \cdots, \lambda_n\in K\}$$

とおくと W は明らかに V の部分 K-右加群であって, かつ $n-1$ 次元である（$u_2, \cdots, u_n$ が W の基である）. そして元

$$y_i = x_i - x_1\lambda_{11}^{-1}\lambda_{1i}, \qquad i=2, \cdots, n+1$$

を考えると W の n 個の元である. ゆえに帰納法の仮定より $y_2, \cdots, y_{n+1}$ は右1次従属である. したがってすべては0でない $\lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}\in K$ が存在して

$$y_2\lambda_2 + \cdots + y_{n+1}\lambda_{n+1} = 0$$

と表わされる. すなわち

$$(x_2 - x_1\lambda_{11}^{-1}\lambda_{12})\lambda_2 + \cdots + (x_{n+1} - x_1\lambda_{11}^{-1}\lambda_{1n+1})\lambda_{n+1} = 0$$

となる. よって $\lambda_1 = -\sum_{i=2}^{n+1}\lambda_{11}^{-1}\lambda_{1i}\lambda_i$ とおくと

$$x_1\lambda_1+x_2\lambda_2+\cdots+x_{n+1}\lambda_{n+1}=0$$

となるが，$\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1}$ の中に0でないものがあるから，$x_1,\cdots,x_{n+1}$ は右1次従属である．以上で補題が証明された．

命題9. n 次元 K-右加群 V における n 個の右1次独立な元は V の基である．すなわち $v_1,\cdots,v_n\in V$ を任意の右1次独立な n 個の元とするならば，V の任意の元 x は

$$x=v_1\lambda_1+\cdots+v_n\lambda_n,\qquad \lambda_1,\cdots,\lambda_n\in K$$

と1通りに表わされる．

証明 V は n 次元 K-右加群であるから定義より右1次独立な元 $u_1,\cdots,u_n$ が存在して，V の任意の元 x は

$$x=u_1\mu_1+\cdots+u_n\mu_n,\qquad \mu_k\in K$$

と表わされる．さて，$u_i,v_1,\cdots,v_n$ は右1次従属である（補題8）から，すべては0でない $\nu_i',\nu_1,\cdots,\nu_n\in K$ が存在して

$$u_i\nu_i'+v_1\nu_1+\cdots+v_n\nu_n=0$$

と表わされる．このとき $\nu_i'\neq 0$ である．実際，もし $\nu_i'=0$ とすると，$v_1\nu_1+\cdots+v_n\nu_n=0$ となるが，$v_1,\cdots,v_n$ は右1次独立であるから $\nu_1=\cdots=\nu_n=0$ となる．これは $\nu_i',\nu_1,\cdots,\nu_n$ がすべては0でないという仮定に反する．したがって $\nu_i'\neq 0$ であることがわかったから $\lambda_{ki}=-\nu_k\nu_i'^{-1}$ とおくと，u_i は

$$u_i=v_1\lambda_{1i}+\cdots+v_n\lambda_{ni},\qquad i=1,\cdots,n$$

と表わされる．よって x は

$$\begin{aligned}x&=u_1\mu_1+\cdots+u_n\mu_n\\&=(v_1\lambda_{11}+\cdots+v_n\lambda_{n1})\mu_1+\cdots+(v_1\lambda_{1n}+\cdots+v_n\lambda_{nn})\mu_n\\&=v_1\lambda_1+\cdots+v_n\lambda_n,\qquad \lambda_k=\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ki}\mu_i\end{aligned}$$

と表わせる．最後に x のこの表わし方が一意的であることを示そう．x が2通りの表わし方

$$x=v_1\lambda_1+\cdots+v_n\lambda_n,\qquad x=v_1\lambda_1'+\cdots+v_n\lambda_n'$$

をもったとすると，これより

$$v_1(\lambda_1-\lambda_1')+\cdots+v_n(\lambda_n-\lambda_n')=0$$

となる．しかるに $v_1,\cdots,v_n$ は右1次独立であるから

$$\lambda_1-\lambda_1'=\cdots=\lambda_n-\lambda_n'=0$$

すなわち

$$\lambda_1=\lambda_1',\cdots,\lambda_n=\lambda_n'$$

となる．以上で命題が証明された．

K^n において $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\cdots$, $e_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ とおくと，$e_1, \cdots, e_n$ は右1次独立であり，K^n の任意のベクトル $x=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ は $x=e_1x_1+\cdots+e_nx_n$ と表わされるので K^n は n 次元 K-右加群である．$e_1, \cdots, e_n$ は K^n の1つの基である．

同様に $M(n, K)$ は n^2 次元 K-右加群である．$M(n, K)$ の基として E_{ij}, $i, j=1, \cdots, n$（E_{ij} は (i, j)-成分だけ1で他の成分はすべて0の行列）を選ぶことができる．

例 59.　$\boldsymbol{R}$ は1次元 $\boldsymbol{R}$-加群である．$\boldsymbol{R}^n$ は n 次元 $\boldsymbol{R}$-加群，$M(n, \boldsymbol{R})$ は n^2 次元 $\boldsymbol{R}$-加群である．

例 60.　$\boldsymbol{C}$ は2次元 $\boldsymbol{R}$-加群である．$1, i$ は $\boldsymbol{R}$-加群 $\boldsymbol{C}$ の1つの基である．また $\boldsymbol{C}$ は1次元 $\boldsymbol{C}$-加群である．同様に $\boldsymbol{C}^n$ は $2n$ 次元 $\boldsymbol{R}$-加群であり，また n 次元 $\boldsymbol{C}$-加群である．$M(n, \boldsymbol{C})$ は $2n^2$ 次元 $\boldsymbol{R}$-加群であり，また n^2 次元 $\boldsymbol{C}$-加群である．

例 61.　$\boldsymbol{H}$ は4次元 $\boldsymbol{R}$-加群である．$1, i, j, k$ は $\boldsymbol{R}$-加群 $\boldsymbol{H}$ の1つの基である．また $\boldsymbol{H}$ は2次元 $\boldsymbol{C}$-右加群である．$1, j$ は $\boldsymbol{C}$-右加群 $\boldsymbol{H}$ の1つの基である．実際，$1, j$ は右1次独立であり，かつ任意の4元数 x は $x=a+bi+cj+dk=(a+bi)+j(c-di)$ と表わされるからである．明らかに $\boldsymbol{H}$ は1次元 $\boldsymbol{H}$-右加群である．同様に $\boldsymbol{H}^n$ は $4n$ 次元 $\boldsymbol{R}$-加群であり，また $2n$ 次元 $\boldsymbol{C}$-右加群であり，さらに n 次元 $\boldsymbol{H}$-右加群である．$M(n, \boldsymbol{H})$ は $4n^2$ 次元 $\boldsymbol{R}$-加群であり，$2n^2$ 次元 $\boldsymbol{C}$-右加群であり，また n^2 次元 $\boldsymbol{H}$-右加群である．

補題 10.　V, W を有限次元 K-右加群とする．V と W が K-右加群として同型であるための必要十分条件は V と W の次元が等しいことである．したがって n 次元 K-右加群はすべて K^n に K-右加群として同型である．

証明　V と W が K-右加群として同型であれば次元が等しいことは容易にわかる．逆に V, W が共に n 次元であるとし，$u_1, \cdots, u_n$；$w_1, \cdots, w_n$ をそれぞれの基とする．V の元 x は $x=\sum_{i=1}^n u_ix_i$, $x_i\in K$ と1意に表わされるので，写像 $f: V\to W$ を $f(x)=\sum_{i=1}^n w_ix_i$ と定義すると f が K-同型写像であることが容易に確かめられる．したがって V と W は K-右加群として同型である．

行列 $A\in M(n, K)$ とベクトル $x\in K^n$ に対してベクトル $y=Ax$ が定まる．（y の

i-成分 y_i は $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$ である). したがって行列 $A \in M(n, K)$ は写像 $A: K^n \to K^n$ を定義する. この写像 A は

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}, \qquad A(\boldsymbol{x}\lambda) = (A\boldsymbol{x})\lambda$$

をみたすので $A: K^n \to K^n$ は K-準同型写像である. $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ のときにはさらに $A(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(A\boldsymbol{x})$ がなりたつが, $K = \boldsymbol{H}$ のときにはなりたたないことに注意しておこう. (しかし $\boldsymbol{H}$ のときでも $\lambda \in \boldsymbol{R}$ ならば $A(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(A\boldsymbol{x})$ は正しい). 行列 $A \in M(n, K)$ を K^n の K-準同型写像とみなすとき, A が正則行列であることと写像 $A: K^n \to K^n$ が K-同型写像であることと対応している.

V を n 次元 K-右加群とし, $\alpha: V \to V$ を K-準同型写像とする. $u_1, \cdots, u_n$ を V の基とし固定しておく. V の元 $x = u_1x_1 + \cdots + u_nx_n$ に対してベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ を対応させると V と K^n が K-右加群として同型であることは補題10で示した通りである. さて $\alpha(u_i)$ は1意的に

$$\alpha(u_i) = u_1a_{1i} + \cdots + u_na_{ni}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

と表わせるので α に対して行列 $A \in M(n, K)$

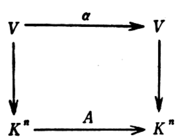
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を対応させる. A を α の基 $u_1, \cdots, u_n$ に関する行列ということにする. $y = \alpha(x)$, $x = \sum_{i=1}^{n} u_ix_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} u_iy_i$ とするとき

$$\sum_{j=1}^{n} u_jy_j = y = \alpha(x) = \alpha(\sum_{i=1}^{n} u_ix_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(u_i)x_i = \sum_{i,j=1}^{n} u_ja_{ji}x_i$$

より $y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i$ となるので

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$



がなりたつ: $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$. このようにして, V の基を定めると K-準同型写像 $\alpha: V \to V$ に行列 $A \in M(n, K)$ が対応し, かつ $x = \sum_{i=1}^{n} u_ix_i \in V$ に $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_ix_i \in K^n$ を対応させて V と K^n を同一視する (補題10) と写像 α は写像 $A: K^n \to K^n$ に一致することがわかった. $\alpha, \beta: V \to V$ を K-準同型写像とし, α, β の基 $u_1, \cdots, u_n$ に関する行列をそれぞれ A, B とするとき, K-準同型写像 $\alpha\beta: V \to V$ の同じ基に関する行列は AB である.

例 62. 行列 $A \in M(n, K)$ を K^n の K-準同型写像 $A: K^n \to K^n$ とみなす（39 頁）とき，この K-準同型写像 A の K^n の基 $e_1, \cdots, e_n$ に関する行列は A 自身である．

V の基をとりかえると行列はつぎの変換をうける．

補題 11. V を n 次元 K-右加群とし，$u_1, \cdots, u_n$; $v_1, \cdots, v_n$ を V の 2 つの基とする．K-準同型写像 $\alpha: V \to V$ の基 $u_1, \cdots, u_n$; $v_1, \cdots, v_n$ に関する行列をそれぞれ A, B とするとき，ある行列 $T \in GL(n, K)$（この T は V の基 $u_1, \cdots, u_n$; $v_1, \cdots, v_n$ のみで定まり，A, B には関係しない）が存在して

$$B = T^{-1}AT$$

となる．

証明 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とするとき，仮定は $\alpha(u_j) = \sum_{i=1}^{n} u_i a_{ij}$, $\alpha(v_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i b_{ij}$ である．$u_j = \sum_{i=1}^{n} v_i s_{ij}$, $v_j = \sum_{i=1}^{n} u_i t_{ij}$, $S = (s_{ij})$, $T = (t_{ij})$ とおくと $TS = E$ である．実際，$u_j = \sum_k v_k s_{kj} = \sum_{i,k} u_i t_{ik} s_{kj}$ より $\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} s_{kj}$ となる．よって $TS = E$ である．同様に $ST = E$ となるから $S = T^{-1}$ である．さて $\sum_i v_i b_{ij} = \alpha(v_j) = \alpha(\sum_k u_k t_{kj}) = \sum_k \alpha(u_k) t_{kj} = \sum_{l,k} u_l a_{lk} t_{kj} = \sum_{i,l,k} v_i s_{il} a_{lk} t_{kj}$ より $b_{ij} = \sum_{l,k} s_{il} a_{lk} t_{kj}$ となる．よって $B = SAT = T^{-1}AT$ が示された．

K を可換体とし，V を有限次元 K-加群とする．補題 11 を用いると，K-準同型写像 $\alpha: V \to V$ に対してその**行列式**が定義できる．すなわち V の基 $u_1, \cdots, u_n$ を選びその基に関する行列を A とし，α の行列式 $\det \alpha$ を

$$\det \alpha = \det A$$

と定義する．この行列式 $\det \alpha$ の定義は V の基 $u_1, \cdots, u_n$ のとり方に関係しない．実際，V の他の基 $v_1, \cdots, v_n$ をとり，この基に関する行列を B とすると $B = T^{-1}AT$ ($T \in GL(n, K)$) と表わされる（補題 11）ので，$\det B = \det(T^{-1}AT) = \det(T^{-1}) \det A \det T = \det(T^{-1}) \det T \det A = \det A$ となるからである．

補題 12. V を有限次元† K-右加群とするとき，写像 $\alpha: V \to V$ に対してつぎの 3 つの条件は同値である．

（1） $\alpha: V \to V$ は K-単射準同型写像である．

（2） $\alpha: V \to V$ は K-全射準同型写像である．

（3） $\alpha: V \to V$ は K-同型写像である．

---

† V が無限次元であればこの補題は成立しない．

特に $A, B \in M(n, K)$ に対して，$AB = E$ ならば $BA = E$ である．

証明 (1)⇒(2), (3) $u_1, \cdots, u_n$ を V の基とする．このとき $v_i = \alpha(u_i)$ とおくと $v_1, \cdots, v_n$ も V の基となる．実際，$v_1\lambda_1 + \cdots + v_n\lambda_n = 0$ とすると $\alpha(u_1)\lambda_1 + \cdots + \alpha(u_n)\lambda_n = 0$, $\alpha(u_1\lambda_1 + \cdots + u_n\lambda_n) = 0 = \alpha(0)$ となる．α は単射であるから $u_1\lambda_1 + \cdots + u_n\lambda_n = 0$ となる．しかるに $u_1, \cdots, u_n$ は V の基であるから $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ となる．よって $v_1, \cdots, v_n$ は右1次独立となり V の基である（命題9）．したがって V の元 y は $y = v_1\lambda_1 + \cdots + v_n\lambda_n$ と表わせるので，y に対して元 $x = u_1\lambda_1 + \cdots + u_n\lambda_n$ を考えると $\alpha(x) = y$ となる．すなわち α は全射である．

(2)⇒(1), (3) $u_1, \cdots, u_n$ を V の基とする．α は全射であるから $\alpha(v_i) = u_i$ となる元 v_i を選ぶと $v_1, \cdots, v_n$ は V の基となる．実際，$v_1\lambda_1 + \cdots + v_n\lambda_n = 0$ とするとき，これに α を施すと $u_1\lambda_1 + \cdots + u_n\lambda_n = 0$ となる．しかるに $u_1, \cdots, u_n$ は V の基であるから $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ となる．よって $v_1, \cdots, v_n$ は右1次独立となり V の基となる（命題9）．V の元 x が $\alpha(x) = 0$ であるとするとき $x = 0$ を示そう．実際，x は $x = v_1\lambda_1 + \cdots + v_n\lambda_n$ と表わされるが，これに α を施すと $0 = u_1\lambda_1 + \cdots + u_n\lambda_n$ となる．しかるに $u_1, \cdots, u_n$ は基であるから $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ となる．よって $x = v_1\lambda_1 + \cdots + v_n\lambda_n = 0$ である．さて $\alpha(x) = \alpha(y)$ とすると $\alpha(x - y) = 0$ となるが上に述べたことから $x - y = 0$, $x = y$ となる．すなわち α は単射である．

(3)⇒(1), (2) は自明である．

最後に A, B を K-準同型写像 $A, B : K^n \to K^n$ とみるとき，$AB = E$ は A が K-全射準同型写像（B が K-単射準同型写像）である（補題1）ことを示している．いま証明した (2)⇒(3) より A が K-同型写像であることがわかる．よって A の逆写像 A^{-1} が存在するが $AB = E$ に左から A^{-1} を施して $B = A^{-1}$, さらに右から A を施して $BA = E$ を得る．

(3) 内積をもつ K-加群

定義 $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．K-右加群 V の任意の2元 x, y に対して K の元 (x, y) が1意に定まり，つぎの5つの条件

(1) $\overline{(y, x)} = (x, y)$

(2) $(x + x', y) = (x, y) + (x', y)$

(3) $(x, y\lambda) = (x, y)\lambda \qquad \lambda \in K$

(4) $(x, x) \geqq 0$

(5)　$(x, x)=0$ ならば　$x=0$

をみたすとき V を**内積をもつ K-右加群**(または**ユニタリ K-右加群**)という. (x, y) を x, y の**内積**という.

(1), (2), (3) の性質から

$$(x, y+y')=(x, y)+(x, y'), \qquad (x\lambda, y)=\bar{\lambda}(x, y)$$

がなりたつことがわかる. また内積は**正則**である. すなわち $(x, y)=0$ が任意の $y\in V$ についてなりたつならば $x=0$ となる.

内積をもつ K-右加群 V において, 元 $x\in V$ の**長さ** $\|x\|$ を

$$\|x\|=\sqrt{(x, x)}$$

と定義する.

補題 13. 内積をもつ K-右加群 V における長さについて

(1)　$\|x\|\geqq 0$

(2)　$\|x\|=0 \iff x=0$

(3)　$\|x\lambda\|=\|x\||\lambda|$

(4)　$|(x, y)|\leqq \|x\|\|y\|$　　(**Cauchy-Schwarz の不等式**)

(5)　$\|x+y\|\leqq \|x\|+\|y\|$

がなりたつ.

証明　(1), (2), (3) は明らかであるから (4), (5) を示そう.

(4)　$y=0$ のときは明らかになりたつから $y\neq 0$ とする. $\lambda=\dfrac{\overline{(x, y)}}{(y, y)}$ とおくとき

$$\begin{aligned}0 \leqq \|x-y\lambda\|^2 &= (x-y\lambda, x-y\lambda)\\ &=(x, x)-\bar{\lambda}(y, x)-(x, y)\lambda+\bar{\lambda}(y, y)\lambda\\ &=(x, x)-\frac{(x, y)(y, x)}{(y, y)}-\frac{(x, y)\overline{(x, y)}}{(y, y)}+\frac{(x, y)(y, y)\overline{(x, y)}}{(y, y)^2}\\ &=\frac{1}{(y, y)}((x, x)(y, y)-(x, y)\overline{(x, y)})\\ &=\frac{1}{\|y\|^2}(\|x\|^2\|y\|^2-|(x, y)|^2)\end{aligned}$$

より (4)式を得る.

(5)

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y)=(x, x)+(x, y)+(y, x)+(y, y)\\ &=\|x\|^2+2\mathrm{Re}(x, y)+\|y\|^2\leqq \|x\|^2+2|(x, y)|+\|y\|^2\\ &\leqq \|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2 \text{ (公式 (4))} =(\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

より (5)式を得る.

定義 内積をもつ n 次元 K-右加群において, V の n 個の元 $e_1, \cdots, e_n$ が

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \cdots, n$$

をみたしているとき $e_1, \cdots, e_n$ を V の**正規直交基**という. V の正規直交基は V の基である.

例 63. $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}, \mathfrak{C}$ は内積をもつ $\boldsymbol{R}$-加群である. 1 ; $1, i$; $1, i, j, k$; $1, e_1, e_2, \cdots, e_7$ はそれぞれ $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}, \mathfrak{C}$ の1つの正規直交基である.

$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とし, K^n の2つのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ の内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \bar{x}_1 y_1 + \cdots + \bar{x}_n y_n$$

と定義するならば, K^n は内積をもつ K-右加群となり, $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は K^n における1つの正規直交基をつくっている.

同様に $M(n, K)$ の2つの行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ の内積 (A, B) を

$$(A, B) = \sum_{i,j} \bar{a}_{ij} b_{ij}$$

と定義すると $M(n, K)$ は内積をもつ K-右加群であり, E_{ij}, $i, j = 1, \cdots, n$ は $M(n, K)$ における正規直交基である.

補題 14. (Schmidt) 内積をもつ有限次元 K-右加群 V は正規直交基をもつ. さらに詳しくつぎのことがなりたつ. $e_1, \cdots, e_m$ を $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \cdots, m$ をみたす V の元とするとき, これに $n-m$ 個の V の元 $e_{m+1}, \cdots, e_n$ をつけ加えて $e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n$ を V の正規直交基にすることができる.

証明 $W = \{\sum_{i=1}^{m} e_i \lambda_i \mid \lambda_i \in K\}$ とおくと W は V の部分 K-右加群である. $W \neq V$ ならば $u \notin W$ なる元 $u \in V$ をとり $e'_{m+1} = u - \sum_{i=1}^{m} e_i(e_i, u)$ とおく. $u \notin W$ であるから $e'_{m+1} \neq 0$ である. かつ $(e_j, e'_{m+1}) = 0$, $j = 1, \cdots, m$ である. 実際, $(e_j, e'_{m+1}) = (e_j, u - \sum_{i=1}^{m} e_i(e_i, u)) = (e_j, u) - \sum_{i=1}^{m} (e_j, e_i)(e_i, u) = (e_j, u) - (e_j, u) = 0$ である. したがって $e_{m+1} = \dfrac{e'_{m+1}}{\|e'_{m+1}\|}$ とおくと $e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}$ は $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \cdots, m, m+1$ をみたしている. この操作をくりかえすと補題を得る.

V, W を内積をもつ K-右加群とする. V と W の間に

$$(f(x), f(y)) = (x, y) \qquad x, y \in V$$

をみたす K-同型写像 $f: V \to W$ が存在するとき, V と W は**内積をもつ K-右加**

群として同型であるという.

補題 10 と同様に, つぎの補題がなりたつ.

補題 15. V, W を内積をもつ有限次元 K-右加群とする. V と W が内積をもつ K-右加群として同型であるための必要十分条件は V と W の次元が等しいことである. したがって内積をもつ n 次元 K-右加群はすべて K^n に内積をもつ K-加群として同型である.

証明 V, W がともに n 次元であるとする. V, W に正規直交基をそれぞれ $u_1, \cdots, u_n$; $w_1, \cdots, w_n$ をとり (補題 14), 写像 $f: V \to W$ を $f(\sum_{i=1}^n u_i x_i) = \sum_{i=1}^n w_i x_i$ と定義すると f は K-同型写像である (補題 10) が, さらに f は内積をたもっている. 実際, $x = \sum_{i=1}^n u_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^n u_i y_i$ に対して $(f(x), f(y)) = (\sum_{i=1}^n w_i x_i, \sum_{j=1}^n w_j y_j) = \sum_{i,j} \bar{x}_i (w_i, w_j) y_j = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$, 一方 $(x, y) = (\sum_{i=1}^n u_i x_i, \sum_{j=1}^n u_j y_j) = \sum_{i,j} \bar{x}_i (u_i, u_j) y_j = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$ であるから $(f(x), f(y)) = (x, y)$ である. 逆は自明である.

(4) 内積と古典群

$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする. 任意の $A \in M(n, K)$ と任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K^n$ に対して

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})$$

がなりたつ. 実際, $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i,j} \overline{a_{ij} x_j} y_i = \sum_{i,j} \bar{x}_j \bar{a}_{ij} y_i = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})$ である. このことを用いて, 古典群 $G(n, K)$ $(O(n), U(n), Sp(n))$ を特徴づけよう.

補題 16. $A \in M(n, K)$ に対してつぎの 5 つの条件は同値である.

(1) $A \in G(n, K)$ すなわち $A^*A = E$ (または $AA^* = E$) である.

(2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K^n$ に対して, $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ がなりたつ.

(3) 任意の $\boldsymbol{x} \in K^n$ に対して, $\|A\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ がなりたつ.

(4) $A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ とするとき $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は K^n の正規直交基である.

(5) $A = (a_{ij})$ とするとき $\sum_{k=1}^n \bar{a}_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$ (または $\sum_{k=1}^n a_{ik} \bar{a}_{jk} = \delta_{ij}$) $i, j = 1, \cdots, n$ がなりたつ.

証明 (1)⇒(2) $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^*A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, E\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(2)⇒(1) $(\boldsymbol{x}, A^*A\boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が任意の $\boldsymbol{x}$ に対してなりたつから $A^*A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$, さらにこれが任意の $\boldsymbol{y}$ に対してなりたつから $A^*A = E$ である.

(2)⇒(3) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ とおくとよい.

(3)⇒(2) $\boldsymbol{x}$ の代りに $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\lambda$ とおくと

$$(A(x+y\lambda), A(x+y\lambda)) = (x+y\lambda, x+y\lambda)$$

$$(Ax, Ax) + \bar{\lambda}(Ay, Ax) + (Ax, Ay)\lambda + \bar{\lambda}(Ay, Ay)\lambda$$
$$= (x, x) + \bar{\lambda}(y, x) + (x, y)\lambda + \bar{\lambda}(y, y)\lambda$$

条件 (3) より

$$\bar{\lambda}\overline{(Ax, Ay)} + (Ax, Ay)\lambda = \bar{\lambda}\overline{(x, y)} + (x, y)\lambda$$

が任意の $\lambda \in K$ に対してなりたつ. これより $(Ax, Ay) = (x, y)$ を得る. (一般に $\bar{\lambda}\bar{\alpha} + \alpha\lambda = \bar{\lambda}\bar{\beta} + \beta\lambda$ が任意の $\lambda \in K$ に対してなりたつならば $\alpha = \beta$ である. それは $\lambda = \bar{\alpha} - \bar{\beta}$ とおくとわかる).

(1) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) は明らかである.

補題 17. V を内積をもつ n 次元 K-右加群とし, $e_1, \cdots, e_n$; $e_1', \cdots, e_n'$ を V の 2 つの正規直交基とする. いま

$$e_i' = \sum_{k=1}^{n} e_k t_{ki}, \qquad i = 1, \cdots, n$$

であるとするとき, 行列 $T = (t_{ij}) \in M(n, K)$ は $T \in G(n, K)$ である.

証明

$$\delta_{ij} = (e_i', e_j') = (\sum_{k=1}^{n} e_k t_{ki}, \sum_{l=1}^{n} e_l t_{lj}) = \sum_{k,l} \bar{t}_{ki}(e_k, e_l)t_{lj}$$
$$= \sum_{k,l} \bar{t}_{ki}\delta_{kl}t_{lj} = \sum_{k} \bar{t}_{ki}t_{kj}$$

となる. よって $T \in G(n, K)$ である (補題 16).

V を内積をもつ n 次元 K-右加群とし, K-同型写像 $\alpha : V \to V$ が任意の $x, y \in V$ に対して

$$(\alpha(x), \alpha(y)) = (x, y)$$

をみたすとする. V に正規直交基 $e_1, \cdots, e_n$ をとり, α のこの基に関する行列を A とすると $A \in G(n, K)$ となる. さて

$$G(V) = \{\alpha \mid \alpha : V \to V \text{ は } K\text{-同型写像}, (\alpha(x), \alpha(y)) = (x, y)\}$$

とおくと $G(V)$ は (写像の合成により) 群になる. そして (V に正規直交基を定め, α に対してこの基に関する行列 A を対応させることにより) $G(V)$ と $G(n, K)$ は群として同型になる. $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ であるにしたがって $G(V)$ を $O(V)$, $U(V)$, $Sp(V)$ と表わし, それぞれ V における**直交群**, **ユニタリ群**, **シンプレクティック群**というが本書では $G(V) = G(n, K)$ と同じ記号で表わすことにする.

例 64. $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}, \mathfrak{C}$ とする. K は内積をもつ d ($d = 1, 2, 4, 8$) 次元 $\boldsymbol{R}$-加群で

あった（例63）. $a \in K$, $|a| = 1$ に対して写像 $l_a : K \to K$ を

$$l_a(x) = ax$$

と定義するとき，$l_a \in O(K) = O(d)$ である．実際，$a(x+y) = ax + ay$, $a(x\lambda) = (ax)\lambda$ $(\lambda \in \boldsymbol{R})$, $(ax, ay) = (x, y)$ がなりたつからである．

例 65. $\boldsymbol{H}_0 = \{x \in \boldsymbol{H} \mid \mathrm{Re}\, x = 0\}$ とおくと（$\boldsymbol{H}$ における内積を用いることにより）$\boldsymbol{H}_0$ は内積をもつ3次元 $\boldsymbol{R}$－加群である．$a \in \boldsymbol{H}$, $a \neq 0$ に対して，写像 $i_a : \boldsymbol{H}_0 \to \boldsymbol{H}_0$ を

$$i_a(x) = axa^{-1}$$

と定義すると $i_a \in O(\boldsymbol{H}_0) = O(3)$ である．実際，まず $\mathrm{Re}(i_a(x)) = \mathrm{Re}(axa^{-1}) = \mathrm{Re}(a^{-1}ax) = \mathrm{Re}\, x = 0$ であるから $i_a(x) \in \boldsymbol{H}_0$ である．また i_a は $\boldsymbol{R}$－同型写像であり，かつ $(axa^{-1}, aya^{-1}) = (x, y)$ をみたすからである．

$M(n, K)$ における内積の性質のうちで，後で用いる性質を追加しておこう．

補題 18. $A, B \in M(n, K)$ に対して

（1） $\|AB\| \leqq \|A\|\|B\|$

（2） $\|A\|, \|B\| \leqq a$ ならば，任意の自然数 $k \geqq 1$ に対して

$$\|A^k - B^k\| \leqq ka^{k-1}\|A - B\|$$

がなりたつ．

証明 （1） $\|AB\|^2 = \sum_{i,j} |\sum_k a_{ik}b_{kj}|^2 \leqq \sum_{i,j}((\sum_k |a_{ik}|^2)(\sum_k |b_{kj}|^2))$（補題13（4））$= (\sum_{i,k} |a_{ik}|^2)(\sum_{k,j} |b_{kj}|^2) = \|A\|^2\|B\|^2$ より（1）を得る．

（2） $k = 1$ のときには明らかになりたつから k に関する帰納法で証明する．(2) の式を仮定すると

$$\begin{aligned}
\|A^{k+1} - B^{k+1}\| &= \|A(A^k - B^k) + (A - B)B^k\| \\
&\leqq \|A\|\|A^k - B^k\| + \|A - B\|\|B\|^k \quad ((1)\ \text{と補題}\,13\ (5)) \\
&\leqq aka^{k-1}\|A - B\| + \|A - B\|a^k \\
&= (k+1)a^k\|A - B\|
\end{aligned}$$

となるので (2) が証明された．

（5） 球 面

$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$; $d = 1, 2, 4$ とする．集合

$$S_K{}^{n-1} = \{\boldsymbol{a} \in K^n \mid \|\boldsymbol{a}\| = 1\}$$

を K^n における $dn-1$ 次元**単位球面**または単に**球面**という．$S_{\boldsymbol{R}}{}^{n-1}$ を単に S^{n-1} で表わす．写像 $f_C : S_C{}^{n-1} \to S^{2n-1}$, $f_H : S_H{}^{n-1} \to S^{4n-1}$ をそれぞれ

$$f_C((a_1+b_1i,\cdots,a_n+b_ni))=(a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n)$$

$$f_H((a_1+b_1i+c_1j+d_1k,\cdots,a_n+b_ni+c_nj+d_nk))$$
$$=(a_1,b_1,c_1,d_1,\cdots,a_n,b_n,c_n,d_n)$$

と定義すると f_C, f_H は明らかに全単射である. したがって $S_C{}^{n-1}$ と S^{2n-1}, $S_H{}^{n-1}$ と S^{4n-1} はそれぞれ集合として同型である. 今後 $S_C{}^{n-1}=S^{2n-1}$, $S_H{}^{n-1}=S^{4n-1}$ とかくことが多い. 球面のうちで S^0, $S_C{}^0=S^1$, $S_H{}^0=S^3$ の3つの球面は（積に関して）群をつくっていることを注意しておこう（例29, 33, 53).

(6) Hermite 行列

定義 $K=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C},\boldsymbol{H}$ とする. 行列 $X\in M(n,K)$ が

$$X^*=X$$

をみたすとき X を n 次の K-**Hermite 行列**という. （$\boldsymbol{R}$-Hermite 行列は普通**実対称行列**と呼ばれている). n 次の K-Hermite 行列全体の集合を $\mathfrak{J}(n,K)$ で表わす：

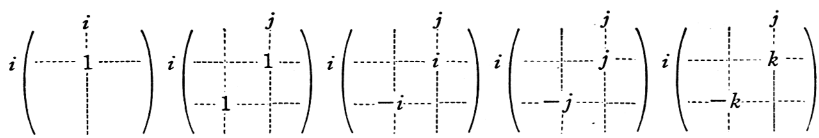
$$\mathfrak{J}(n,K)=\{X\in M(n,K)\,|\,X=X^*\}$$

補題 19. (1) $\mathfrak{J}(n,\boldsymbol{R})$ は $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 次元 $\boldsymbol{R}$-加群である.

(2) $\mathfrak{J}(n,\boldsymbol{C})$ は n^2 次元 $\boldsymbol{R}$-加群である.

(3) $\mathfrak{J}(n,\boldsymbol{H})$ は $n(2n-1)$ 次元 $\boldsymbol{R}$-加群である.

証明 X, Y が K-Hermite 行列ならば $X+Y$, λX ($\lambda\in\boldsymbol{R}$) もまた K-Hermite 行列である[†]から $\mathfrak{J}(n,K)$ は $\boldsymbol{R}$-加群である. さて $X=(x_{ij})\in\mathfrak{J}(n,K)$ は, $X^*=X$ よりすぐわかるように, X の (i,j)-成分 x_{ij} と (j,i)-成分 x_{ji} の間には $x_{ji}=\bar{x}_{ij}$ の関係がある. 特に対角線の成分 x_{ii} は実数である. したがって $K=\boldsymbol{H}$ のとき $\mathfrak{J}(n,\boldsymbol{H})$ の基として



n 個　　　　それぞれ $1+2+\cdots+(n-1)$ 個

をとることができる. この数の合計は $n+4(1+2+\cdots+(n-1))=n+4\dfrac{n(n-1)}{2}$ $=n(2n-1)$ である. よって $\mathfrak{J}(n,\boldsymbol{H})$ は $n(2n-1)$ 次元である. $K=\boldsymbol{C}$ のときも同様

† X が $\boldsymbol{C}$-Hermite 行列のとき λX ($\lambda\in\boldsymbol{C}$) は $\boldsymbol{C}$-Hermite 行列となるとは限らない. 実際, $(\lambda X)^*=\bar{\lambda}X$ となるからである. したがって $\mathfrak{J}(n,\boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{C}$-加群ではない. 同様に $\mathfrak{J}(n,\boldsymbol{H})$ は $\boldsymbol{C}$-(右)加群でも $\boldsymbol{H}$-(右)加群でもない.

に $n+2(1+2+\cdots+(n-1))=n^2$ 次元であり，$K=\boldsymbol{R}$ のときは $n+(1+2+\cdots+(n-1))=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 次元である．

（7） 固　有　値

行列 A の固有値，固有ベクトル，トレースについて後で必要な範囲で説明しておこう．

$K=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}$ のとき，行列 $X\in M(n,K)$ に対して $\det(\xi E-X)$ を X の **固有多項式** という．X の固有多項式は K の元を係数にもつ ξ の n 次多項式である．つぎに $K=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C},\boldsymbol{H}$ とし，行列 $X=(x_{ij})\in M(n,K)$ に対して $\mathrm{tr}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_{ii}$ と定義し $\mathrm{tr}(X)$ を X の **トレース**（または **跡**）という．

補題20. （1） $K=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}$ とする．$X\in M(n,K)$, $A\in GL(n,K)$ に対して，X と $A^{-1}XA$ の固有多項式は一致する：

$$\det(\xi E-A^{-1}XA)=\det(\xi E-X)$$

（2） $K=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C},\boldsymbol{H}$ とする．$X\in\mathfrak{S}(n,K)$, $A\in G(n,K)$ に対して X と $A^{-1}XA$ のトレースは等しい：

$$\mathrm{tr}(A^{-1}XA)=\mathrm{tr}(X)^{\dagger}$$

証明 （1） $\det(\xi E-A^{-1}XA)=\det(A^{-1}(\xi E-X)A)=\det A^{-1}\det(\xi E-X)\det A=\det(\xi E-X)$.

（2） $A^{-1}XA=A^{*}XA$ も K-Hermite 行列であるから $\mathrm{tr}(A^{*}XA)$ が実数であることに注意すると，$\mathrm{tr}(A^{-1}XA)=\mathrm{tr}(A^{*}XA)=\sum_{i,j,k}\bar{a}_{ji}x_{jk}a_{ki}=\mathrm{Re}(\sum_{i,j,k}\bar{a}_{ji}x_{jk}a_{ki})=\mathrm{Re}(\sum_{i,j,k}x_{jk}a_{ki}\bar{a}_{ji})=\mathrm{Re}(\sum_{j,k}x_{jk}\delta_{kj})$（補題16）$=\mathrm{Re}(\sum_{j}x_{jj})=\sum_{j}x_{jj}=\mathrm{tr}(X)$ である．

しばらく $K=\boldsymbol{C}$ のときに限ろう．$X\in M(n,\boldsymbol{C})$ に対して

$$\det(\xi E-X)=0$$

の根 λ を X の **固有値** という．$\lambda\in\boldsymbol{C}$ が X の固有値であるための必要十分条件は $X\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$ をみたすベクトル $\boldsymbol{a}\in K^n$, $\boldsymbol{a}\neq 0$ が存在することである．実際，λ が X の固有値ならば $\det(\lambda E-X)=0$ であるから行列 $\lambda E-X$ は正則でない．ゆえに $\lambda E-X$ を写像 $\lambda E-X:\boldsymbol{C}^n\to\boldsymbol{C}^n$ とみるとき単射でない．したがって $(\lambda E-X)\boldsymbol{a}=0$, すなわち $X\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$ をみたすベクトル $\boldsymbol{a}\neq 0$ が存在する．逆は今の計算を逆にたどるとよい．$X\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$ をみたすベクトル $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{C}^n$, $\boldsymbol{a}\neq 0$ を **固有値 λ に属する X の固有ベクトル** という．

補題21. 行列 $X\in M(n,\boldsymbol{C})$ はあるユニタリ行列 $A\in U(n)$ により

---

† K が可換体であるときには，任意の $A,B\in M(n,K)$ に対して $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ がなりたつので，これを用いると任意の $X\in M(n,K)$, $A\in GL(n,K)$ に対して $\mathrm{tr}(A^{-1}XA)=\mathrm{tr}(X)$ がなりたつことがわかる．$K=\boldsymbol{H}$ では $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ は成立しない．

$$A^{-1}XA=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

に変形できる．ここに $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は X の固有値である．

証明　n に関する帰納法によって証明する．$n=1$ のときには明らかになりたつので $n-1$ 次の行列 Y に対しては補題がなりたつと仮定する．さて $X \in M(n, C)$ の固有値の1つを λ_1 とし，$\boldsymbol{a}_1 \in \boldsymbol{C}^n$ ($\|\boldsymbol{a}_1\|=1$) を λ_1 に属する X の固有ベクトルとする：$X\boldsymbol{a}_1=\lambda_1\boldsymbol{a}_1$. $\boldsymbol{a}_1$ を含む $\boldsymbol{C}^n$ の正規直交基 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ をとり（補題14），行列 $B=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$ を作ると $B \in U(n)$ で（補題16），$B^{-1}XB=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & \\ \vdots & Y \\ 0 & \end{pmatrix}$，$Y \in M(n-1, \boldsymbol{C})$ となる．実際，$B^{-1}XB\boldsymbol{e}_1=B^{-1}X\boldsymbol{a}_1=B^{-1}(\lambda_1\boldsymbol{a}_1)=\lambda_1B^{-1}\boldsymbol{a}_1=\lambda_1\boldsymbol{e}_1$ である（例62）．行列 Y は帰納法の仮定によりある $C \in U(n-1)$ により $C^{-1}YC=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ に変形される．$A=B\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & C\end{pmatrix}$ とおくと $A \in U(n)$ であり，かつ $A^{-1}XA=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ となる．このとき $\det(\xi E-X)=\det(\xi E-A^{-1}XA)$（補題20(1)）$=(\xi-\lambda_1)\cdots(\xi-\lambda_n)$ となるから $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は X の固有値である．

$K=\boldsymbol{R}$ のときには，行列 $X \in M(n, \boldsymbol{R})$ の固有値問題は複素数体 $\boldsymbol{C}$ のときほど簡単でない．しかし，もし $\det(\xi E-X)=0$ が実根 λ をもてば λ を X の**固有値**という．$\lambda \in \boldsymbol{R}$ が X の固有値であれば，$X\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$ をみたすベクトル $\boldsymbol{a} \neq 0$ が $\boldsymbol{R}^n$ に存在するのでこの $\boldsymbol{a}$ を**固有値 λ に属する X の固有ベクトル**ということは $\boldsymbol{C}$ のときと同様である．$K=\boldsymbol{H}$ のときの固有値問題はより複雑であるが Hermite 行列に対してはつぎの補題がなりたつ．

補題22.　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．$X \in \mathfrak{J}(n, K)$ ならば

$$X\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$$

をみたす $\lambda \in \boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{a} \in K^n$, $\boldsymbol{a} \neq 0$ が存在する．

証明　まず $K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ のとき証明しよう．$K=\boldsymbol{R}$ のときには $X \in \mathfrak{J}(n, \boldsymbol{R})$ を $X \in \mathfrak{J}(n, \boldsymbol{C})$ とみなしておく．さて λ を X の固有値の1つとし，$\boldsymbol{a}$ を λ に属する固有ベクトルとする：$X\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} \neq 0$.　このとき $\bar{\lambda}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})=(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})=(X\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}, X^*\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}, X\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{a})=\lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ より $(\bar{\lambda}-\lambda)\|\boldsymbol{a}\|^2=0$ となるが $\|\boldsymbol{a}\| \neq 0$ より $\bar{\lambda}=\lambda$ となる．

よって $\lambda \in \boldsymbol{R}$ である．$K=\boldsymbol{C}$ のときにはこれで補題が証明されたが $K=\boldsymbol{R}$ のときには，$\lambda \in \boldsymbol{R}$ が X の固有値であることがわかったから，固有ベクトル $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{R}^n$ のベクトルにとりかえることができる．$K=\boldsymbol{H}$ のとき，写像 $f: \boldsymbol{H}^n \to \boldsymbol{C}^{2n}$ を $f((a_1+jb_1, \cdots, a_n+jb_n))=(a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n)$ と定義すると f は全単射であり，$f(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda f(\boldsymbol{a})$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$ をみたす．また写像 $\tilde{f}: M(n, \boldsymbol{H}) \to M(2n, \boldsymbol{C})$ を

$$\tilde{f}((a_{ij}+jb_{ij}))=\begin{pmatrix} a_{ij} & -\bar{b}_{ij} \\ b_{ij} & \bar{a}_{ij} \end{pmatrix}$$

と定義すると $X \in M(n, \boldsymbol{H})$, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{H}^n$ に対して $f(X\boldsymbol{a})=\tilde{f}(X)f(\boldsymbol{a})$ がなりたち，また $X \in \mathfrak{I}(n, \boldsymbol{H})$ ならば $\tilde{f}(X) \in \mathfrak{I}(2n, \boldsymbol{C})$ であることが容易に確められる．さて $X \in \mathfrak{I}(n, \boldsymbol{H})$ ならば $\tilde{f}(X) \in \mathfrak{I}(2n, \boldsymbol{C})$ であるから，上に述べたことより $\tilde{f}(X)\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{b}$ をみたす $\lambda \in \boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{C}^{2n}$, $\boldsymbol{b} \neq 0$ が存在する．f は全射であるから $f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}$ となる $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{H}^n$ $(\boldsymbol{a} \neq 0)$ をとると $f(X\boldsymbol{a})=\tilde{f}(X)f(\boldsymbol{a})=\tilde{f}(X)\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{b}=\lambda f(\boldsymbol{a})=f(\lambda\boldsymbol{a})$ となる．しかるに f が単射であるから $X\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$ となる．以上で補題が証明された．

つぎの命題は Hermite 行列のもつ基本的な性質である．

命題 23. $K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．K-Hermite 行列 $X \in \mathfrak{I}(n, K)$ はある $A \in G(n, K)$ により

$$A^{-1}XA=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

に変形できる．ここに $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は実数であり，さらに $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は順序を除いて（A のとり方に関係せず）X に対して 1 意に定まる．

証明　証明法は補題 21 と同じであるが再記しよう．n に関する帰納法によって証明する．$n=1$ のときは明らかになりたつから $X \in \mathfrak{I}(n-1, K)$ に対しては命題がなりたつと仮定する．さて $X \in \mathfrak{I}(n, K)$ に対して $X\boldsymbol{a}_1=\lambda_1\boldsymbol{a}_1$ をみたす $\lambda_1 \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{a}_1 \in K^n$ $(\|\boldsymbol{a}_1\|=1)$ をとる（補題 22）．$\boldsymbol{a}_1$ を含む K^n の正規直交基 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ をとり（補題 14），行列 $B=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$ を作ると $B \in G(n, K)$ で，$B^{-1}XB=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \\ \vdots & Y \\ 0 & \end{pmatrix}$, $Y \in M(n-1, K)$ となる．X が K-Hermite ならば $B^{-1}XB$ も K-Hermite であるから $*=0$, $Y \in \mathfrak{I}(n-1, K)$ となる．Y は帰納法の仮定より，ある $C \in G(n-1, K)$ により

$C^{-1}YC=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ ($\lambda_i\in\boldsymbol{R}$) に変形される. $A=B\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}$ とおくと $A\in G(n,K)$

であり, $A^{-1}XA=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ ($\lambda_i\in\boldsymbol{R}$) となる. このとき $\mathrm{tr}(X^k)=\mathrm{tr}(A^{-1}X^kA)$

(補題20(2)) $=\mathrm{tr}((A^{-1}XA)^k)=\sum_{i=1}^n\lambda_i^k$ となる. したがって $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ は方程式

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i^k=\mathrm{tr}(X^k),\qquad k=1,\cdots,n$$

の解として, X に対して (A のとり方に関係せず) 定まる (証明は付録 (2)(補題179)).

注意と定義　$K=\boldsymbol{H}$ のときには行列式が定義されないので, 行列 $X\in M(n,\boldsymbol{H})$ の固有値 λ を $\det(\xi E-X)=0$ の根と定義することはできない. また $X\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\lambda$ をみたす $\lambda\in\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{H}^n$ が存在するということでも定義できない. さらに, たとえ $X\in M(n,\boldsymbol{H})$ が正則行列 $A\in GL(n,\boldsymbol{H})$ により $A^{-1}XA=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$, $\lambda_i\in\boldsymbol{H}$ の形に変形されたとしても, $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ は X に対して固有ではない. すなわちこの $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ は A のとり方に関係するのである. 以上のことから一般の行列 $X\in M(n,\boldsymbol{H})$ に対しては適当な固有値の定義がないのである. しかし $X\in M(n,\boldsymbol{H})$ が Hermite 行列であるときには命題23が示すように $A\in Sp(n)$ で対角線形に直すとき, 対角線に現われる $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ は $A\in Sp(n)$ のとり方に関係せず X に対して固有に定まるので, この $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ を $\boldsymbol{H}$-Hermite 行列 X の**固有値**と定義する.

定義　固有値がすべて正である K-Hermite 行列 $X\in\mathfrak{J}(n,K)$ を n 次の**正値 K-Hermite 行列**という. n 次の正値 K-Hermite 行列全体の集合を $\mathfrak{J}_+(n,K)$ で表わす.

補題24.　$X\in\mathfrak{J}(n,K)$ に対してつぎの3つの条件は同値である.

(1)　X は正値である.

(2)　$X=Y^2$, $Y\in\mathfrak{J}_+(n,K)$ と表わせる.

(3)　任意の $\boldsymbol{a}\in K^n$, $\boldsymbol{a}\neq 0$ に対して $(X\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})>0$ である.

証明　X はある $A\in G(n,K)$ により

$$X=ADA^{-1},\qquad D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\ \lambda_i\in\boldsymbol{R}$$

と表わされる (命題23) ことを用いる.

(1)⇒(2)　X が正値ならば $\lambda_1>0, \cdots, \lambda_n>0$ であるから $Y=A\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}A^{-1}$ とおくと，$Y\in\mathfrak{S}_+(n, K)$ でありかつ $X=Y^2$ となる．

(2)⇒(3)　$(X\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})=(YY\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})=(Y\boldsymbol{a}, Y^*\boldsymbol{a})=(Y\boldsymbol{a}, Y\boldsymbol{a})\geqq 0$ である．つぎに $(X\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})=0$ とすると，$Y\boldsymbol{a}=0$ となるが，$Y\in\mathfrak{S}_+(n, K)$ は正則行列であるから $\boldsymbol{a}=0$ となる．

(3)⇒(1)　$A\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{a}_i$ とおくと $\boldsymbol{a}_i\neq 0$ である．さて $\lambda_i=\lambda_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)=(\lambda_i\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)=(D\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)=(A^{-1}XA\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)=(A^*XA\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)=(XA\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_i)=(X\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i)>0$,　$i=1, \cdots, n$ であるから X は正値である．

(8)　$G(n, K)$ の行列の標準形

命題 25.　(1)　行列 $A\in SO(n)$ はある $B\in O(n)$† により

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_p & \\ & & & (1)\end{pmatrix}, \qquad A_k=\begin{pmatrix}\cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k\end{pmatrix}$$

に変形できる．ここに記号 (1) は n が偶数のときは空であり n が奇数のときには 1 を表わすものとする．

(2)　行列 $A\in U(n)$ はある $B\in U(n)$ により

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix}e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n}\end{pmatrix}, \qquad \theta_k\in\boldsymbol{R}$$

に変形できる．

(3)　行列 $A\in Sp(n)$ はある $B\in Sp(n)$ により

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix}e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n}\end{pmatrix}, \qquad \theta_k\in\boldsymbol{R}$$

に変形できる．

証明　(2)　一般に，ユニタリ行列 A の固有値 λ の絶対値は 1 である：$|\lambda|=1$. 実際，$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\neq 0$ とすると $|\lambda|\|\boldsymbol{x}\|=\|\lambda\boldsymbol{x}\|=\|A\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|$ より $|\lambda|=1$ を得る．さて $A\in U(n)$ はある $B\in U(n)$ により $B^{-1}AB=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & * \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ に変形される（補題 21）．λ_k

† B を $B\in SO(n)$ とすることもできる．

は A の固有値であるから $|\lambda_k|=1$, よって $\lambda_k=e^{i\theta_k}$ $(k=1,\cdots,n)$ と表わせる．また $B^{-1}AB$ もユニタリ行列であることと $|\lambda_k|=1$ のことから $*=0$ となることがわかり (2) が証明された．

(1) $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{C}$ より $A\in SO(n)$ を $A\in U(n)$ とみなすと上述の (2) の結果より，ある $C=(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_1',\cdots,\boldsymbol{c}_m,\boldsymbol{c}_m',\boldsymbol{c}_{2m+1},\cdots,\boldsymbol{c}_n)\in U(n)$ により A は対角線形の行列に変形される．しかるに A は実行列であるからその固有多項式 $\det(\xi E-A)$ は実係数の多項式であるので A が固有値 $\lambda\,(\lambda\notin\boldsymbol{R})$ をもてばその共役複素数 $\bar{\lambda}$ も固有値としてもつ．したがって（必要あれば $\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j'$ などの順序を適当にかえることにより）

$$C^{-1}AC=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&&&&\\&\bar{\lambda}_1&&&&&&\\&&\ddots&&&&&\\&&&\lambda_m&&&&\\&&&&\bar{\lambda}_m&&&\\&&&&&\varepsilon_{2m+1}&&\\&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&\varepsilon_n\end{pmatrix}$$

$\lambda_j\in\boldsymbol{C}$, $\lambda_j\notin\boldsymbol{R}$, $|\lambda_j|=1$ $(j=1,\cdots,m)$, $\varepsilon_k=1$ $(k=2m+1,\cdots,l)$, $\varepsilon_k=-1$ $(k=l+1,\cdots,n)$ としてよい．さらに $\lambda_i\neq\bar{\lambda}_j$ $(i,j=1,\cdots,m)$ と仮定しておいてよい．つぎに C として $C=(\boldsymbol{c}_1,\bar{\boldsymbol{c}}_1,\cdots,\boldsymbol{c}_m,\bar{\boldsymbol{c}}_m,\boldsymbol{c}_{2m+1},\cdots,\boldsymbol{c}_n)$[†], $\boldsymbol{c}_k\in\boldsymbol{R}^n$ $(k=2m+1,\cdots,n)$ に選ぶことができることを示そう．実際，$\boldsymbol{c}_k$ $(k=2m+1,\cdots,n)$ は実数の固有値 ε_k に属するので実ベクトル $\boldsymbol{c}_k$ におきかえることができる．また $A\boldsymbol{c}_j=\lambda_j\boldsymbol{c}_j$ $(j=1,\cdots,m)$ より $A\bar{\boldsymbol{c}}_j=\bar{\lambda}_j\bar{\boldsymbol{c}}_j$ を得るから C の $\boldsymbol{c}_j'$ を $\bar{\boldsymbol{c}}_j$ にとりかえて得られる $\boldsymbol{c}_1,\bar{\boldsymbol{c}}_1,\cdots,\boldsymbol{c}_m,\bar{\boldsymbol{c}}_m,\boldsymbol{c}_{2m+1},\cdots,\boldsymbol{c}_n$ が $\boldsymbol{C}^n$ の正規直交基であることを証明すればよいが，それは「$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{y}=\mu\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}\neq 0$, $\boldsymbol{y}\neq 0$, $\lambda\neq\mu$ ならば $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$」を示すとその目的が達せられる．「　」の証明は $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ に ${}^tA$, $\bar{\lambda}$ をかけると $\bar{\lambda}\boldsymbol{x}={}^tA\boldsymbol{x}$ となるので $\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\bar{\lambda}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=({}^tA\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\mu\boldsymbol{y})=\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\lambda\neq\mu$ より $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ がわかる．さて

$$\begin{cases}\boldsymbol{b}_{2j-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{c}_j+\bar{\boldsymbol{c}}_j)\\[2ex]\boldsymbol{b}_{2j}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\,i}(\boldsymbol{c}_j-\bar{\boldsymbol{c}}_j)\end{cases}\qquad j=1,\cdots,m$$

$$\boldsymbol{b}_k=\boldsymbol{c}_k\qquad\qquad k=2m+1,\cdots,n$$

† ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{C}^n$ に対してベクトル $(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)\in\boldsymbol{C}^n$ を $\bar{\boldsymbol{x}}$ で表わす．

とおくと $\boldsymbol{b}_j$, $\boldsymbol{b}_k$ はいずれも実ベクトルであり，かつ $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{2m-1}, \boldsymbol{b}_{2m}, \boldsymbol{b}_{2m+1}, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ が $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基であることが容易に確かめられる．よって $B=(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$ とおくと $B \in O(n)$ である．$\lambda_j = c_j - is_j$ $(c_j, s_j \in \boldsymbol{R}, j=1, \cdots, m)$ とすると

$$\begin{aligned} B^{-1}AB\boldsymbol{e}_{2j-1} &= B^{-1}A\boldsymbol{b}_{2j-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}B^{-1}A(\boldsymbol{c}_j + \bar{\boldsymbol{c}}_j) = \frac{1}{\sqrt{2}}B^{-1}(\lambda_j\boldsymbol{c}_j + \bar{\lambda}_j\bar{\boldsymbol{c}}_j) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}B^{-1}((c_j - is_j)\boldsymbol{c}_j + (c_j + is_j)\bar{\boldsymbol{c}}_j) \\ &= B^{-1}\left(c_j\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{c}_j + \bar{\boldsymbol{c}}_j) + s_j\frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\boldsymbol{c}_j - \bar{\boldsymbol{c}}_j)\right) \\ &= B^{-1}(c_j\boldsymbol{b}_{2j-1} + s_j\boldsymbol{b}_{2j}) = c_j\boldsymbol{e}_{2j-1} + s_j\boldsymbol{e}_{2j} \end{aligned}$$

となる．同様に

$$B^{-1}AB\boldsymbol{e}_{2j} = -s_j\boldsymbol{e}_{2j-1} + c_j\boldsymbol{e}_{2j}$$

となるので A は B により

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} A_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & A_m & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} c_j & -s_j \\ s_j & c_j \end{pmatrix}$$

と変形される．$|\lambda_j| = 1$ より $c_j = \cos\theta_j$, $s_j = \sin\theta_j$ とおきかえることができる．また $\det A = 1$ より固有値 -1 の個数は偶数であるから $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix}$ とかきかえると (1) が証明された．

(3) は補題 22 の写像 $\tilde{f}$ を用いて $A \in Sp(n)$ 対して $\tilde{f}(A) \in U(2n)$ の固有値を調べるのであるが証明は付録 (3) で与えることにする．

§7. 射影空間

この節で射影空間の定義を与えよう．ここでは普通に用いる射影空間の定義のほかに Hermite 行列を用いて定義する方法も述べる．幾何学の一分野に射影幾何学があるがそれはこの射影空間に点，直線，平面等を定義してそれらの関係を調べる幾何学であって，それ自身大そう興味ある分野であるが，本書では射影空間の位相を調べるのを目的とするの

でそれらには全く触れていない.

（Ⅰ）射影平面

$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．0 以外の 3 次元ベクトル全体の集合 $K^3-\{0\}$ において

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \iff y_i = x_i\lambda(i=1,2,3) \text{ をみたす } \lambda\in K \text{ がある}$$

と定義すると関係～は同値法則をみたす．$K^3-\{0\}$ のこの関係～による等化集合 $(K^3-\{0\})/\sim$ を KP_2 で表わし，$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ にしたがって，**実射影平面 $\boldsymbol{R}P_2$, 複素射影平面 $\boldsymbol{C}P_2$, 4 元数射影平面 $\boldsymbol{H}P_2$** という．

$K^3-\{0\}$ における関係 ～ が同値法則をみたすことを証明するには結合法則 $x(yz)=(xy)z$ を用いなければならない．したがって Cayley 数体 $\mathfrak{C}$ をもとにして上に述べたような方法で射影平面を定義することはできない．以下 Cayley 数体 $\mathfrak{C}$ にも通用するように射影平面の定義をかえてみよう．まず考え方を述べよう．$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ のとき，$x_1\neq 0$ ならば $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1\bar{x}_1 \\ x_2\bar{x}_1 \\ x\ \bar{x}_1 \end{pmatrix}$ である．同様に $x_2\neq 0$ ならば $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1\bar{x}_2 \\ x_2\bar{x}_2 \\ x_3\bar{x}_2 \end{pmatrix}$, $x_3\neq 0$ ならば $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1\bar{x}_3 \\ x_2\bar{x}_3 \\ x_3\bar{x}_3 \end{pmatrix}$ である．新しくできた 3 つのベクトルを並べて行列 $X\in M(3,K)$

$$X=\frac{1}{|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2}\begin{pmatrix} x_1\bar{x}_1 & x_1\bar{x}_2 & x_1\bar{x}_3 \\ x_2\bar{x}_1 & x_2\bar{x}_2 & x_2\bar{x}_3 \\ x_3\bar{x}_1 & x_3\bar{x}_2 & x_3\bar{x}_3 \end{pmatrix}$$

をつくると，この X は $X^*=X$ (Hermite), $\mathrm{tr}(X)=1$ を明らかにみたしているがさらに $X^2=X$ (冪(べき)等) であることも容易に確かめることができる．

補題 26. $K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．$X\in M(3,K)$ に対してつぎの 2 つの条件は同値である．

(1) $X^*=X,\ X^2=X,\ \mathrm{tr}(X)=1$

(2) ある $A\in G(3,K)$ により $X=AE_3A^*$ と表わされる．ここに $E_3=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ とする．

証明 (1)⇒(2) Hermite 行列 $X\in\mathfrak{J}(3,K)$ はある $B\in G(3,K)$ により

$$B^{-1}XB=B^*XB=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i\in\boldsymbol{R}$$

に変形できる（命題23）．条件 $X^2 = X$ より $(B^*XB)^2 = B^*XB$ となるので

$$\begin{pmatrix} \lambda_1{}^2 & & \\ & \lambda_2{}^2 & \\ & & \lambda_3{}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

となる．したがって $\lambda_i{}^2 = \lambda_i$, すなわち $\lambda_i = 0$ または $\lambda_i = 1$, $i = 1, 2, 3$ となる．$\mathrm{tr}(X) = 1$ より $\mathrm{tr}(B^*XB) = 1$ となる（補題20(2)）から B^*XB は $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ のいずれかである．E_1 のときには $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in G(3, K)$ により $C^*E_1C = E_3$ となり，E_2 のときには $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in G(3, K)$ により $C^*E_2C = E_3$ となるので $A = BC$ とおくと $A^*XA = E_3$ となる．E_3 であるときは $A = B$ とおくとよい．したがって，いずれの場合にも $X = AE_3A^*$, $A \in G(3, K)$ と表わされる．

(2)⇒(1)　E_3 が $E_3{}^* = E_3$, $E_3{}^2 = E_3$, $\mathrm{tr}(E_3) = 1$ の性質をもつことは明らかである．さて $X^* = (AE_3A^*)^* = A^{**}E_3{}^*A^* = AE_3A^* = X$, $X^2 = AE_3A^*AE_3A^* = AE_3{}^2A^* = AE_3A^* = X$, $\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(AE_3A^*) = \mathrm{tr}(E_3)$（補題20(2)）$= 1$ である．

さて射影平面をつぎのように定義する．

定義　$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}, \mathfrak{C}$ とする．集合

$$KP(2) = \{X \in M(3, K) \mid X^* = X,\ X^2 = X,\ \mathrm{tr}(X) = 1\}$$

を体 K の上の**射影平面**という．

$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ のとき初めに述べた射影平面の定義と一致することを示そう．写像 $f: K^3 - \{0\} \to KP(2)$ を

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2} \begin{pmatrix} x_1\bar{x}_1 & x_1\bar{x}_2 & x_1\bar{x}_3 \\ x_2\bar{x}_1 & x_2\bar{x}_2 & x_2\bar{x}_3 \\ x_3\bar{x}_1 & x_3\bar{x}_2 & x_3\bar{x}_3 \end{pmatrix}$$

と定義すると f は全射である．実際，$KP(2)$ の元 X はある $A \in G(n, K)$ により $X = AE_3A^*$ と表わせる（補題26）．$A = \begin{pmatrix} & & x_1 \\ & * & x_2 \\ & & x_3 \end{pmatrix}$ $(|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = 1$ である$)$ であるとすると $X = AE_3A^* = \left(x_i\bar{x}_j\right)_{i,j=1,2,3}$ であるから $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X$ となる．すなわち f は全

射である．$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in K^3 - \{0\}$ に対して $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$, すなわち $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\lambda$ ならば $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ であることは容易に示される．逆に $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K^3 - \{0\}$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$, すなわち $\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2}(x_i\bar{x}_j) = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{y}\|^2}(y_i\bar{y}_j)$ であるとしよう．x_1, x_2, x_3 のうちどれか１つは０でないから $x_1 \neq 0$ と仮定しておく．(1,1)-成分を比較して $\dfrac{|x_1|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2} = \dfrac{|y_1|^2}{\|\boldsymbol{y}\|^2}$, ゆえにある $\kappa \in K$, $|\kappa| = 1$ が存在して $y_1 = \dfrac{\|\boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}x_1\kappa$ と表わせる．(2,1)-成分 $\dfrac{x_2\bar{x}_1}{\|\boldsymbol{x}\|^2} = \dfrac{y_2\bar{y}_1}{\|\boldsymbol{y}\|^2}$ に y_1 を代入すると $y_2 = \dfrac{\|\boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}x_2\kappa$, 同様に (3,1)-成分より $y_3 = \dfrac{\|\boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}x_3\kappa$ を得る．したがって $\dfrac{\|\boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\kappa = \lambda$ とおくと $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\lambda$ となる．以上で

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \iff f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$$

が示された．ゆえに f は全単射 $\bar{f} : (K^3 - \{0\})/\sim \to KP(2)$ を誘導する（補題 2）．したがって KP_2 と $KP(2)$ は集合として同型である：$KP_2 \approx KP(2)$.

（２） 射影直線

$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}, \mathfrak{C}$ とする．集合

$$KP(1) = \{X \in M(2, K) \mid X^* = X, X^2 = X, \mathrm{tr}(X) = 1\}$$

を体 K の上の**射影直線**という．

$X \in M(2, K)$ が $X \in KP(1)$ であるための条件を求めよう．$X^* = X$ であるから

$$X = \begin{pmatrix} \xi & \bar{x} \\ x & \eta \end{pmatrix}, \qquad \xi, \eta \in \boldsymbol{R}, x \in K$$

とおくことができるが $\mathrm{tr}(X) = 1$ より $\xi + \eta = 1$ である．さらに $X^2 = X$ の条件を計算すると

$$\begin{pmatrix} \xi & \bar{x} \\ x & 1-\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi & \bar{x} \\ x & 1-\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & \bar{x} \\ x & 1-\xi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi^2 + |x|^2 & \bar{x} \\ x & |x|^2 + (1-\xi)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & \bar{x} \\ x & 1-\xi \end{pmatrix}$$

となる．これより $\xi(1-\xi) = |x|^2$ がわかる．したがって $X \in M(2, K)$ が $KP(1)$ に属するための必要十分条件は X が

$$X = \begin{pmatrix} \xi & \bar{x} \\ x & 1-\xi \end{pmatrix}, \qquad \xi(1-\xi) = |x|^2, \xi \in \boldsymbol{R}, x \in K$$

の形であることである．

$d = 1, 2, 4, 8$ とし

$$S_d = \{(\xi, x) \in \boldsymbol{R} \times K \mid \xi(1-\xi) = |x|^2\}$$

とおくと S_d は d 次元球面[†] である．写像 $f: S_d \to KP(1)$ を

$$f(\xi, x) = \begin{pmatrix} \xi & \bar{x} \\ x & 1-\xi \end{pmatrix}$$

と定義すると f は全単射である．したがって $KP(1)$ と S_d は集合として同型である：$KP(1) \approx S_d$.

（3） **射影空間**

$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．$K^n - \{0\}$ $(n \geqq 1)$ において

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\lambda \text{ となる } \lambda \in K \text{ が存在する}$$

と定義すると関係～は同値法則をみたす．$K^n - \{0\}$ のこの関係による等化集合 $(K^n - \{0\})/\sim$ を KP_{n-1} と表わし，KP_{n-1} を体 K の上の $n-1$ 次元**射影空間**という．$n = 3, 2$ のときがそれぞれ射影平面，射影直線である．射影平面のとき（補題 26）と同様につぎの補題がなりたつ．

補題 27. $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．$X \in M(n, K)$ に対してつぎの 2 つの条件は同値である．

（1） $X^* = X,\ X^2 = X,\ \mathrm{tr}(X) = 1$

（2） ある $A \in G(n, K)$ により $X = AE_nA^*$ と表わされる．ここに

$$E_n = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ とする．}$$

集合 $KP(n-1)$ を

$$KP(n-1) = \{X \in M(n, K) \mid X^* = X,\ X^2 = X,\ \mathrm{tr}(X) = 1\}$$

と定義し，$KP(n-1)$ も体 K の上の $n-1$ 次元**射影空間**という．そして写像 f: $K^n - \{0\} \to KP(n-1)$ を

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} (x_i \bar{x}_j)_{i,j=1,\cdots,n}$$

---

† S_d の元 (ξ, x) は $\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + |x|^2 = \frac{1}{2^2}$ をみたすから S_d は $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の球面である．S_d と単位球面 S^d は集合として同型である：$S_d \approx S^d$．実際，写像 $f: S_d \to S^d$ を $f(\xi, x) = (2\xi - 1, 2x)$ と定義すると f は全単射である．

と定義すると f が全単射 $\bar{f}: KP_{n-1} \to KP(n-1)$ を誘導することは，補題27を用いると射影平面のときと同様にして示すことができる．よって KP_{n-1} と $KP(n-1)$ は集合として同型である：$KP_{n-1} \approx KP(n-1)$.

注 意　$\mathfrak{C}$-Hermite 行列を用いても Cayley 数体の上の射影空間 $\mathfrak{C}P(n)$, $(n \geqq 3)$ をつくることはできない．その理由は「Cayley 数体 $\mathfrak{C}$ が結合法則をみたさないので **Desargues の公理**が $\mathfrak{C}P(2)$ では成立しない．したがって $\mathfrak{C}P(2)$ を含む射影空間は存在しない」と射影幾何学が教えるからである．だから射影空間 $KP(n-1)$ $(n \geqq 4)$ を行列の形で定義することに本質的な意味はないかも知れない．なお一般の体からも射影空間が定義されるが，多様体であり，かつ射影空間であるものはここにあげたもの以外に存在しないことが知られている．

2 射影空間と古典群の位相

集合に開集合を定義することにより位相を導入し，その構造を調べよう．目的を射影空間および古典群の位相（弧状連結，コンパクト）を調べることにおく．前章で集合として同型であったことのほとんどが本章では位相空間として同型あるいは位相群として同型となる．

§1. 距離空間

位相空間を定義する前に，その特別の場合である距離空間についてまず説明しておこう．球面，射影空間，古典群をはじめ本書で取扱う空間のほとんどが距離空間である．

(1) 距離空間

定義 集合 X の任意の2つの元（点ともいう）x, y に対して実数 $d(x, y)$ が一意に定まり，つぎの4つの条件

(1) $d(x, y) \geqq 0$

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ **(対称関係)**

(3) $d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y)$ **(三角不等式)**

(4) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

をみたすとき，X を（**距離** d に関する）**距離空間**という．

例66. $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}, \mathfrak{C}$ とする．K の2点 x, y の距離を $d(x, y) = |x - y|$ と定義すると K は距離空間になる．

例67. $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．K^n の2点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の距離を $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ と定義すると K^n は距離空間になる．特に $\boldsymbol{R}^n$ を n 次元**ユークリッド空間**という．

例68. $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．$M(n, K)$ の2点 A, B の距離を $d(A, B) = \|A - B\|$ と定義すると $M(n, K)$ は距離空間になる．

X, Y を2つの距離空間とする（X, Y における距離を同じ文字 d で表わすことにする）．全単射 $f: X \to Y$ が

$$d(f(x), f(x')) = d(x, x'), \quad x, x' \in X$$

をみたすとき，fを**等距離写像**という．距離空間 X と Y の間に等距離写像 $f: X \to Y$が存在するとき，X と Y は**距離空間として同型**であるといい，記号 $X \simeq Y$ で表わす．

$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．例 66, 67, 68 より一般に，内積をもつ K-右加群 V において 2 点 $x, y \in V$ の距離を $d(x, y) = \|x - y\|$ と定義すると V は距離空間になる（補題 13）．V, W を次元の等しい 2 つの内積をもつ K-右加群とするとき，V と W は内積をもつ K-右加群として同型となる（補題 15）から V と W は距離空間としても同型となる．したがって，つぎの命題 28（例 59, 60, 61）補題 29（補題 19）を得る．しかし，直接等距離写像を与えておいた．

命題 28. つぎの空間はそれぞれ距離空間として同型である．

$$\mathfrak{C} \simeq \boldsymbol{R}^8$$

$$\boldsymbol{C}^n \simeq \boldsymbol{R}^{2n}, \ \boldsymbol{H}^n \simeq \boldsymbol{R}^{4n}$$

$$M(n, \boldsymbol{R}) \simeq \boldsymbol{R}^{n^2}, \ M(n, \boldsymbol{C}) \simeq \boldsymbol{C}^{n^2} \simeq \boldsymbol{R}^{2n^2}, \ M(n, \boldsymbol{H}) \simeq \boldsymbol{H}^{n^2} \simeq \boldsymbol{R}^{4n^2}$$

証 明　写像 $f: \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{R}^{2n}$

$$f(x_1 + y_1 i, \cdots, x_n + y_n i) = (x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$$

は等距離写像である．また写像 $f: M(n, \boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}^{n^2}$

$$f(a_{ij}) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}, a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}, \cdots, a_{nn})$$

は等距離写像である．他の場合にも同様にして等距離写像を与えることができる．

補題 29. つぎの空間はそれぞれ距離空間として同型である．

$$\mathfrak{S}(n, \boldsymbol{R}) \simeq \boldsymbol{R}^{n(n+1)/2}, \ \mathfrak{S}(n, \boldsymbol{C}) \simeq \boldsymbol{R}^{n^2}, \ \mathfrak{S}(n, \boldsymbol{H}) \simeq \boldsymbol{R}^{n(2n-1)}$$

証 明　写像 $f: \mathfrak{S}(n, \boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}^{n(n+1)/2}$ を

$$f(x_{ij}) = (x_{11}, \cdots, x_{nn}, \sqrt{2}\,x_{12}, \cdots, \sqrt{2}\,x_{1n}, \sqrt{2}\,x_{23}, \cdots, \sqrt{2}\,x_{2n}, \sqrt{2}\,x_{34}, \cdots, \sqrt{2}\,x_{n-1n})$$

と定義すると f は等距離写像である．他の場合にも同様にして等距離写像を与えることができる．

距離空間 X の部分集合 A は，2 点 $a, b \in A$ の距離 $d(a, b)$ として X の距離 $d(a, b)$ をそのまま用いると，明らかに距離空間になる．したがって K^n の部分集合である球面 S_K^{n-1}, $M(n, K)$ の部分集合である射影空間 $KP(n-1)$，古典群 $GL(n, K)$, $SL(n, K)$,

$G(n, K)$, $SG(n, K)$ はいずれも距離空間である.

例 69. 46頁の写像 $f_C: S_C{}^{n-1} \to S^{2n-1}$, $f_H: S_H{}^{n-1} \to S^{4n-1}$ は等距離写像である. したがって $S_C{}^{n-1}$ と S^{2n-1}, $S_H{}^{n-1}$ と S^{4n-1} は距離空間として同型である : $S_C{}^{n-1} \simeq S^{2n-1}$, $S_H{}^{n-1} \simeq S^{4n-1}$.

解析学で知られている有界, 収束の概念を距離空間において定義しよう.

定 義 距離空間 X の部分集合 A に対して, ある点 $x_0 \in X$ とある $r > 0$ が存在して, 任意の点 $a \in A$ がつねに $d(a, x_0) \leqq r$ となっているとき, A は **有 界** であるという.

定 義 距離空間 X において点列 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$ と X の点 x に対して $\lim_{m\to\infty} d(x_m, x) = 0$ がなりたつとき, $\lim_{m\to\infty} x_m = x$ とかき, 点列 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$ は x に **収 束 す る** という. ($\lim_{m\to\infty} d(x_m, x) = 0$ とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 M が存在し, $m > M$ ならば $d(x_m, x) < \varepsilon$ がなりたつことである).

補 題 30. 距離空間 X において, $\lim_{m\to\infty} x_m = x$ ならばつぎの (1), (2) がなりたつ.

(1) 点列 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$ の任意の部分列 $x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_m}, \cdots$ も同じ x に収束する.

(2) $\{x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots ; x\}$ は有界集合である.

証 明 (1) は明らかである. (2) $\lim_{m\to\infty} x_m = x$ であるから, $\varepsilon = 1$ に対して自然数 M が存在し, $m > M$ ならば $d(x_m, x) < 1$ となる. $r = \max\{1, d(x_k, x), \ k = 1, \cdots, M\}$ とおくと点列の任意の点 x_m に対して $d(x_m, x) \leqq r$ がなりたつ. したがって $\{x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots ; x\}$ は有界である.

定 義 F を距離空間 X の部分集合とする. X の点 x に対して, x に収束する F の点列 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$ があるならばつねに $x \in F$ となるとき, すなわち

$$\lim_{m\to\infty} x_m = x \quad (x_1, x_2, \cdots x_m, \cdots \in F) \quad \text{ならば} \quad x \in F$$

がなりたつとき F は (X の) **閉 集 合** であるという.

例 70. 距離空間 X の有限個の点からなる集合 F は X の閉集合である. 特に距離空間 X の1点 x は X の閉集合である.

例 71. F_λ, $\lambda \in \Lambda$ を距離空間 X の閉集合とするとき, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ もまた X の閉集合である.

補 題 31. X を距離空間とする. 点 $a \in X$ と正数 $\varepsilon > 0$ に対し, 集合 $F = \{x \in X \mid d(x, a) \geqq \varepsilon\}$ は X の閉集合である.

証 明 $\lim_{m\to\infty} x_m = x$, $d(x_m, a) \geqq \varepsilon$ $(m = 1, 2, \cdots)$ とするとき, $d(x, a) \geqq \varepsilon$ を示そ

う．かりに $d(x, a) < \varepsilon$ とする．$\lim_{m\to\infty} x_m = x$ であるから，$\varepsilon - d(x, a) > 0$ に対して自然数 M が存在し，$m > M$ ならば，$d(x_m, x) < \varepsilon - d(x, a)$ となる．ゆえに $d(x_m, a) \leqq d(x_m, x) + d(x, a) < \varepsilon$ となり，$d(x_m, a) \geqq \varepsilon$ の仮定に反する．したがって $d(x, a) \geqq \varepsilon$，すなわち $x \in F$ が示された．よって F は閉集合である．

（2） 距離空間における連続写像

定義　X, Y を距離空間とする．写像 $f: X \to Y$ が，X の任意の点 x に対し，x に収束するいかなる点列 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$ をとっても点列 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_m), \cdots$ が $f(x)$ に収束するとき，すなわち

$$\lim_{m\to\infty} x_m = x \quad ならば \quad \lim_{m\to\infty} f(x_m) = f(x)$$

をみたすとき，f は **連続** であるという．

例 72.　写像 $f: M(n, K) \to M(n, K)$, $f(A) = A^*$ は連続である．実際，一般に $B \in M(n, K)$ に対して $\|B^*\| = \|B\|$ がなりたつので $\lim_{m\to\infty} A_m = A$，すなわち $\lim_{m\to\infty} \|A_m - A\| = 0$ ならば明らかに $\lim_{m\to\infty} \|A_m{}^* - A^*\| = 0$，すなわち $\lim_{m\to\infty} A_m{}^* = A^*$ となるからである．同様に写像 $f: M(n, K) \to M(n, K)$, $f(A) = {}^tA$ も連続である．

例 73.　写像 $f: M(n, K) \to M(n, K)$, $f(A) = AA^*$ は連続である．実際，$\lim_{m\to\infty} A_m = A$ とすると $A_1, A_2, \cdots, A_m, \cdots$ は有界である（補題 30 (2)）から $\|A_m\| \leqq a$ $(m = 1, 2, \cdots)$ をみたす $a \in \boldsymbol{R}$ が存在する．このとき

$$\begin{aligned}\|A_m A_m{}^* - AA^*\| &= \|A_m(A_m{}^* - A^*) + (A_m - A)A^*\| \\ &\leqq \|A_m\|\|A_m{}^* - A^*\| + \|A_m - A\|\|A^*\| \\ &\leqq a\|A_m - A\| + \|A_m - A\|\|A\| \\ &= (a + \|A\|)\|A_m - A\| \longrightarrow 0 \qquad (m \to \infty)\end{aligned}$$

であるから $\lim_{m\to\infty} A_m A_m{}^* = AA^*$ である．

例 74.　$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とする．写像 $\det: M(n, K) \to K$ は連続である．実際，$\det A$ は A の成分 a_{ij}, $i, j = 1, \cdots, n$ の多項式であるからである．

つぎの命題は連続写像のいま 1 つの定義を与えている．

命題 32.　X, Y を距離空間とする．写像 $f: X \to Y$ に対してつぎの 2 つの条件は同値である．

（1）　f は連続である．

（2）　Y の任意の閉集合 F に対して $f^{-1}(F)$ は X の閉集合である．

証明　(1) ⇒ (2)　f は連続であるとし，F を Y の閉集合とする．$f^{-1}(F)$ の点列 x_1,

$x_2, \cdots, x_m, \cdots$ が $\lim_{m\to\infty} x_m = x$ とすると f が連続であるから $\lim_{m\to\infty} f(x_m) = f(x)$ となる. しかるに $f(x_m) \in F$ であり, F が閉集合であるから $f(x) \in F$ である. ゆえに $x \in f^{-1}(F)$ となり, $f^{-1}(F)$ の閉集合であることが証明された.

(2) ⇒ (1) 背理法による. f が連続でないとすると, $\lim_{m\to\infty} x_m = x$ であっても $\lim_{m\to\infty} f(x_m) \neq f(x)$ となる点列 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$; x が存在する. $\lim_{m\to\infty} f(x_m) \neq f(x)$ であるから, ある正数 $\varepsilon > 0$ と $x_1, x_2, \cdots x_m, \cdots$ の部分列 $x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_m}, \cdots$ が存在して $d(f(x_{k_m}), f(x)) \geqq \varepsilon$ $(m = 1, 2, \cdots)$ となる. $F = \{y \in Y \mid d(y, f(x)) \geqq \varepsilon\}$ とおくと F は Y の閉集合である (補題 31) から, (2) の仮定より $f^{-1}(F)$ は閉集合である. しかるに $x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_m}, \cdots$ は $f^{-1}(F)$ に属し, かつ $\lim_{m\to\infty} x_{k_m} = x$ である (補題 30 (1)) から, $f^{-1}(F)$ が閉集合であることより $x \in f^{-1}(F)$ となる. よって $f(x) \in F$, すなわち $\varepsilon \leqq d(f(x), f(x)) = 0$ となり矛盾する. 以上で f が連続であることが証明された.

X, Y を距離空間とする. 直積集合 $X \times Y$ の 2 点 $(x, y), (x', y')$ の距離を

$$d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(d(x, x'))^2 + (d(y, y'))^2}$$

と定義すると $X \times Y$ は距離空間になる. この距離空間 $X \times Y$ を X と Y の**直積距離空間**という. さらに, 一般に距離空間 $X_1, \cdots, X_n$ の直積集合 $X_1 \times \cdots \times X_n$ の 2 点 $(x_1, \cdots, x_n), (x_1', \cdots, x_n')$ の距離を

$$d((x_1, \cdots, x_n), (x_1', \cdots x_n')) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (d(x_k, x_k'))^2}$$

でいれて直積距離空間 $X_1 \times \cdots \times X_n$ を定義することができる.

例 75. $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする. 距離空間 K^n (例 67) は距離空間 K (例 66) の n 個の直積距離空間である.

X, Y, Z を距離空間とするとき, 写像 $f: X \times Y \to Z$ が連続であるための条件は

$$\lim_{m\to\infty} x_m = x, \quad \lim_{m\to\infty} y_m = y \quad \text{ならば} \quad \lim_{m\to\infty} f(x_m, y_m) = f(x, y)$$

である.

例 76. 写像 $f: M(n, K) \times M(n, K) \to M(n, K)$, $f(A, B) = AB$ は連続である. 実際, $\lim_{m\to\infty} A_m = A$, $\lim_{m\to\infty} B_m = B$ とする. $A_1, A_2, \cdots, A_m, \cdots$ は有界である (補題 30 (2)) から $\|A_m\| \leqq a$ $(m = 1, 2, \cdots)$ をみたす $a \in \boldsymbol{R}$ がある.

$$\begin{aligned}\|A_m B_m - AB\| &= \|A_m(B_m - B) + (A_m - A)B\| \\ &\leqq \|A_m\|\|B_m - B\| + \|A_m - A\|\|B\| \\ &\leqq a\|B_m - B\| + \|A_m - A\|\|B\| \longrightarrow 0 \qquad (m \to \infty)\end{aligned}$$

したがって $\lim_{m\to\infty} A_m B_m = AB$ となる.

(3) 有界閉集合

ここでコンパクトという非常に重要な概念を定義しよう．このコンパクトについてはつぎの位相空間の節でもう一度触れることにする.

定義 $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．K^n または $M(n, K)$ の有界閉集合を**コンパクト**集合という.

例 77. K^n の有限個の点からなる集合はコンパクトである（例 70).

定理 2. $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．K^n の単位球面 $S_K{}^{n-1}$ はコンパクトである.

証明 写像 $f: K^n \to \boldsymbol{R}$ を $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ と定義すると f は連続である．実際, $\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{x}$ とすると $|\|\boldsymbol{x}_m\| - \|\boldsymbol{x}\|| \leqq \|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}\| \to 0$ $(m \to \infty)$ より $\lim_{m\to\infty} \|\boldsymbol{x}_m\| = \|\boldsymbol{x}\|$ となるからである．$1 \in \boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{R}$ の閉集合である（例 70）から，$S_K{}^{n-1} = f^{-1}(1)$ は K^n の閉集合である（命題 32)．また $S_K{}^{n-1}$ は明らかに有界であるから $S_K{}^{n-1}$ はコンパクトである.

例 78. K^n はコンパクトではない．実際，K^n は有界でないからである.

例 79. $V_K{}^n = \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq 1\}$ はコンパクトである．実際，$V_K{}^n$ が有界であることは明らかであるが $V_K{}^n$ が K^n の閉集合であることも容易に示される（補題 31 参照）からである．また閉区間 $I = [0, 1]$ もコンパクトである.

定理 3. 古典群 $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$, $SU(n)$ はコンパクトである.

証明 写像 $f: M(n, K) \to M(n, K)$, $f(A) = AA^*$ は連続であった（例 73)．$G(n, K) = f^{-1}(E)$ であるから，$G(n, K)$ は 1 点 E の逆像として $M(n, K)$ の閉集合である（命題 32)．$A \in G(n, K)$ の成分 a_{ij} は $\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$ をみたす（補題 16 (5)）から $|a_{ij}| \leqq 1$ がわかる．したがって $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} \leqq n$ となり $G(n, K)$ は有界である．以上で $G(n, K)$ がコンパクトであることが証明された．つぎに $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とするとき，写像 $\det: M(n, K) \to K$ は連続であった（例 74)．したがって $SL(n, K) = \det^{-1}(1)$ は $M(n, K)$ の閉集合である（命題 32)．ゆえに $SG(n, K) = G(n, K) \cap SL(n, K)$ は 2 つの閉集合の共通部分であるから閉集合である（例 71)．また $SG(n, K)$ は有界集合 $G(n, K)$ の部分集合として当然有界である．よって $SG(n, K)$ はコンパクトである.

(4) 完備距離空間

定義 X を距離空間とする．X の点列 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$ が $\lim_{m,k\to\infty} d(x_m, x_k) = 0$ であるならば $\lim_{m\to\infty} d(x_m, x) = 0$ となる点 $x \in X$ が存在するとき，距離空間 X は**完備**で

あるという．($\lim_{m,k\to\infty} d(x_m, x_k)=0$ とは，任意の $\varepsilon>0$ に対してある自然数 N が存在し，$m, k>N$ ならば $d(x_m, x_k)<\varepsilon$ がなりたつことである）．$\lim_{m,k\to\infty} d(x_m, x_k)=0$ をみたす点列 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$ を**基本列**ということにするならば，X が完備距離空間であるとは X の任意の基本列が収束する距離空間であるということができる．

$\boldsymbol{R}$ が完備であることは基本的でありよく知られている（これは **Cauchy の定理**と呼ばれている）．

注意　2つの距離空間 X, Y が距離空間として同型：$X\simeq Y$ であり，かつ X が完備であれば，Y も完備であることは明らかである．しかし完備の概念は位相空間の不変量でないことに注意しておこう．すなわちつぎの節で位相空間の同相という概念を定義するが，それによると X と Y が同相な距離空間であり，X が完備であるとしても，Y は完備であるとは限らないのである．たとえば，$X=\boldsymbol{R}$ とすると X は完備であるが $Y=$ 開区間 $(0,1)$ は完備でない．実際，Y においては $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ は基本列であるが収束しない．しかるに X と Y は同相である（例 85)．

補題 33.　X, Y をともに完備距離空間とするとき，その直積距離空間 $X\times Y$ も完備である．

証明　$a_1=(x_1, y_1), a_2=(x_2, y_2), \cdots, a_m=(x_m, y_m), \cdots$ を $X\times Y$ の基本列とする．距離の定義 $d((x, y), (x', y'))=\sqrt{(d(x, x'))^2+(d(y, y'))^2}$ より $d(x_m, x_k), d(y_m, y_k)\leqq d(a_m, a_k)$ となるので，$x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$ および $y_1, y_2, \cdots, y_m, \cdots$ は基本列である．X, Y は完備であるから，これらの点列はそれぞれある点 $x\in X$，$y\in Y$ に収束する：$\lim_{m\to\infty} x_m=x$，$\lim_{m\to\infty} y_m=y$．$a=(x, y)$ とおくと，$\lim_{m\to\infty} a_m=\lim_{m\to\infty}(x_m, y_m)=(\lim_{m\to\infty} x_m, \lim_{m\to\infty} y_m)=(x, y)=a$ となり，$X\times Y$ の完備であることが証明された．

例 80.　K^n, $M(n, K)$ は完備距離空間である．実際，K^n, $M(n, K)$ はそれぞれ $\boldsymbol{R}^{dn}$, $\boldsymbol{R}^{dn^2}$ と距離空間として同型であった（命題 28)．$\boldsymbol{R}$ は完備であるからその直積距離空間 $\boldsymbol{R}^{dn}$, $\boldsymbol{R}^{dn^2}$（例 75）は完備であり（補題 33)，したがって K^n, $M(n, K)$ も完備である．

補題 34.　$A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots \in M(n, K)$ を行列の点列とする．このとき $\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$ が収束すれば $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ も収束する．($\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$, $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ が収束するとは点列 $\sum_{k=1}^{m}\|A_k\|$, $\sum_{k=1}^{m} A_k$, $m=1, 2, \cdots$ が収束することであり，$\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$, $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ はそれぞれ $\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\|A_k\|$, $\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} A_k$ のことである．$\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$ が収束するとき，点列 $\sum_{k=1}^{m} A_k$, $m=1, 2, \cdots$ は**絶対収束する**ということすれば，この補題は絶対収束する点列は収束するということをいい表わしている）．

証明　$\sum_{k=1}^{m} A_k$, $m=1, 2, \cdots$ は $M(n, K)$ の基本列である．実際，$\|\sum_{k=1}^{m} A_k-\sum_{k=1}^{l} A_k\|=$

$\|\sum_{k=l}^{m} A_k\|$ ($m \geqq l$ とした) $\leqq \sum_{k=l}^{m} \|A_k\| \to 0$ ($l, m \to \infty$) である．しかるに $M(n, K)$ は完備である(例80) から点列 $\sum_{k=1}^{m} A_k$, $m = 1, 2, \cdots$ は収束する．

§2. 位相空間

本書で取扱う空間のほとんどが K^n, $M(n, K)$ の部分空間であるので距離空間である．だからといって，位相のことを距離空間に限って論じようとするとかえって話を複雑にし，本質的なものを誤解させる恐れがある．したがって距離空間より一般な位相空間を定義して，さらに連続写像，コンパクト，弧状連結集合の概念を中心に，位相空間のもつ一般的な性質をまとめておこう．

(1) 位相空間

定義 集合 X において，つぎの3つの条件をみたす X の部分集合族 $\mathcal{O}$ が与えられているとする：

(1) $\phi \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$

(2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

(3) $O_\lambda \in \mathcal{O}$, $\lambda \in \Lambda$ ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

((3)の意味は，$\mathcal{O}$ から任意個数の O_λ をとってくるとき，その和集合もまた $\mathcal{O}$ に属することである)．このとき，$\mathcal{O}$ は X に**位相**を定める，または X を ($\mathcal{O}$ を開集合族とする) **位相空間**という．すなわち集合 X に位相を導入するとは，X に (1) (2) (3) の条件をみたす X の部分集合族 $\mathcal{O}$ を指定することである．$\mathcal{O}$ に属する集合を (X の) **開集合**という．点 $x \in X$ を含む開集合を x の**近傍**という．

X を距離空間とする．点 $a \in X$ と正数 $\varepsilon > 0$ に対して X の部分集合

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$$

を a の **ε-近傍**という．X の部分集合 O が (X の) 開集合であることをつぎのように定義する：

O の任意の点 a に対して，O に含まれる a の ε-近傍が存在する：$U_\varepsilon(a) \subset O$

(空集合は開集合とみなす)．このようにして定義した (X の) 開集合の全体を $\mathcal{O}$ で表わすと，$\mathcal{O}$ は位相空間の条件 (1) (2) (3) をみたすことを示そう．(1) ϕ, X が開集合であることは明らかである．(2) O_1, O_2 を開集合とする．$a \in O_1 \cap O_2$ とすると $a \in O_i$ であるから a の ε_i-近傍 $U_{\varepsilon_i}(a)$ を $U_{\varepsilon_i}(a) \subset O_i$ のようにとれる ($i = 1, 2$)．$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,$

$\varepsilon_2\}$ とすると $U_\varepsilon(a)\subset O_1\cap O_2$ となるがこれは $O_1\cap O_2$ が開集合であることを示している．(3) O_λ；$\lambda\in\Lambda$ を開集合とする．$a\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$ をとると，ある λ が存在して $a\in O_\lambda$ となる．O_λ が開集合であるから a の ε-近傍 $U_\varepsilon(a)$ を $U_\varepsilon(a)\subset O_\lambda$ のようにとることができる．このとき $U_\varepsilon(a)\subset O_\lambda\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$ である．よって $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$ は開集合である．

このようにして距離空間 X に位相を導入することができた．以後距離空間 X を位相空間とみなす方法はつねにこの方法によるものとする．

定義　X を位相空間とする．X の部分集合 F に対して F の補集合 $X-F$ が開集合であるとき，F を（X の）**閉集合**という．

位相空間 X の閉集合についてつぎの3つの条件がなりたつことは $X-(F_1\cup F_2)=(X-F_1)\cap(X-F_2)$, $X-\bigcap_{\lambda}F_\lambda=\bigcup_{\lambda}(X-F_\lambda)$ などを用いると容易にわかる．

（1）　ϕ, X は閉集合である．

（2）　F_1, F_2 が閉集合ならば $F_1\cup F_2$ も閉集合である．

（3）　F_λ, $\lambda\in\Lambda$ が閉集合ならば $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda$ も閉集合である．

前節で距離空間 X の部分集合 F が閉集合であることを点列 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots\in F$ が $\lim_{m\to\infty}x_m=x$ ならば $x\in F$ がなりたつことと定義した（いま仮にこの閉集合のことを極限の意味での閉集合と名付けよう）が，この定義はここで与えた閉集合の定義と一致することを示そう．まず F が極限の意味で閉集合であるとしよう．$a\in X-F$ とする．a の任意の ε-近傍 $U_\varepsilon(a)$ に対して $U_\varepsilon(a)\cap F\neq\phi$ であると仮定しよう．$\varepsilon=\dfrac{1}{m}$ とおくとき，$U_{1/m}(a)\cap F\neq\phi$ であるから $x_m\in U_{1/m}(a)\cap F$ なる点 x_m がある．$\varepsilon=1, \dfrac{1}{2}, \cdots, \dfrac{1}{m}, \cdots$ として上のように選んだ F の点列 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$ は $d(x_m, a)<\dfrac{1}{m}$ であるから $\lim_{m\to\infty}d(x_m, a)=0$, すなわち $\lim_{m\to\infty}x_m=a$ である．F は極限の意味の閉集合であるから，$a\in F$ となり $a\in X-F$ に反する．ゆえに，ある a の ε-近傍 $U_\varepsilon(a)$ が存在して $U_\varepsilon(a)\cap F=\phi$, すなわち $U_\varepsilon(a)\subset X-F$ となる．よって $X-F$ は開集合，すなわち F が閉集合であることが示された．逆に F が閉集合であるとしよう．いま点列 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots\in F$ が $\lim_{m\to\infty}x_m=a$ であるが $a\notin F$ と仮定しよう．このとき $a\in X-F$ であり，$X-F$ は開集合である．したがって a のある ε-近傍 $U_\varepsilon(a)$ が存在して $U_\varepsilon(a)\subset X-F$ となる．ゆえに $U_\varepsilon(a)\cap F=\phi$ となるが，これは $\lim_{m\to\infty}x_m=a$ に矛盾しているのである．実際，$\lim_{m\to\infty}x_m=a$ より上記の ε に対して m を十分大きくとると $d(x_m, a)<\varepsilon$, すなわち $x_m\in U_\varepsilon(a)$ となる．$x_m\in F$ であるから $x_m\in U_\varepsilon(a)\cap F$ となり $U_\varepsilon(a)\cap$

$F=\phi$ に矛盾する．ゆえに $a\in F$ となり，F が極限の意味で閉集合であることが示された．

A を位相空間 X の部分集合とする．A の部分集合 U が X のある開集合 O を用いて

$$U=O\cap A$$

と表わされるとき，U を A の開集合と定義する．このように定義した A の開集合全体の族は位相空間の条件 (1) (2) (3) をみたしている．それは (1) $\phi=\phi\cap A$, $A=X\cap A$ (2) $(O_1\cap A)\cap(O_2\cap A)=(O_1\cap O_2)\cap A$ (3) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(O_\lambda\cap A)=(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda)\cap A$ より明らかである．したがって A は位相空間になる．このようにして得られた A の位相を A の X に対する**相対位相**といい，相対位相をもった部分集合 A を X の**部分空間**という．相対位相の定義より，A の部分集合 C が A の閉集合であるための必要十分条件は，C が X のある閉集合 F を用いて

$$C=F\cap A$$

と表わされることであることが容易にわかる．これより，X の閉集合 F に対して，F の閉集合 C はまた X の閉集合であることがわかる．

距離空間 X の部分集合 A は X の距離を用いると距離空間になった (61 頁) が，この距離空間 A を位相空間とみなしたものが，位相空間 X に対する相対位相により A を位相空間とみなしたものと同じである．

例 81. $\boldsymbol{R}$ は当然 $\boldsymbol{R}$ の開集合である．しかし，$\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{R}^2$ の開集合ではない．このように開集合，閉集合の用語には X の，A のという接頭語が必要である．しかし X が一定しているときには省略することが多い．

定義　X を位相空間とする．X の任意の相異なる 2 点 x, y に対して

$$U\cap V=\phi$$

をみたす x の近傍 U と y の近傍 V が存在するとき，X を **Hausdorff 空間**という．

補題 35. Hausdorff 空間 X の部分空間 A はまた Hausdorff 空間である．

証明　$a, b\in A$, $a\neq b$ とすると，X が Hausdorff 空間であることより $U\cap V=\phi$ となる a, b の近傍 U, V が存在する．$U\cap A$, $V\cap A$ は $(U\cap A)\cap(V\cap A)=\phi$ であって，かつそれぞれ a, b の A における近傍である．ゆえに A は Hausdorff 空間である．

補題 36. Hausdorff 空間 X の 1 点 x は X の閉集合である．

証明　$X-x$ が X の開集合であることを示そう．$y\in X-x$ とすると $x\neq y$ であるので，X が Hausdorff 空間であることから，それぞれ x, y の近傍 U, V_y を $U\cap V_y=$

ϕ となるようにとることができる．特に $x \cap V_y = \phi$ であるから $V_y \subset X - x$ である．$X - x$ の各点 y に対して $V_y \subset X - x$ となる近傍 V_y をとると，$X - x = \bigcup_{y \in X-x} V_y$ となるので，$X - x$ は開集合 V_y の和集合として開集合である．したがって 1 点 x は閉集合である．

補題 37. 距離空間 X は Hausdorff 空間である．

証明 $x \neq y$ とすると $d(x, y) > 0$ である．$\varepsilon = \frac{1}{2} d(x, y)$ とおくと，$U_\varepsilon(x)$, $U_\varepsilon(y)$ はそれぞれ x, y の近傍であり，かつ $U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) = \phi$ をみたしている．よって X は Hausdorff 空間である．

定義 位相空間 X の各点 x が X の開集合であるとき，X を **離散空間** という．

離散空間 X は明らかに Hausdorff 空間である．

例 82. $S^0 = \{-1, 1\}$ は離散空間である．より一般に，有限個の点からなる距離空間は離散である．

例 83. 整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{R}$ の離散部分空間である．

(2) 連続写像

定義 X, Y を位相空間とする．写像 $f: X \to Y$ が条件

(1) Y の任意の開集合 O に対して $f^{-1}(O)$ が X の開集合である．

をみたすとき f は **連続** であるという．

この連続の条件 (1) は

(2) Y の任意の閉集合 F に対して $f^{-1}(F)$ が X の閉集合である．

と同じである．実際，(1) ⇒ (2) F を Y の閉集合とすると，$Y - F$ は Y の開集合であるから条件 (1) より $f^{-1}(Y - F)$ は X の開集合である．しかるに $X - f^{-1}(F) = f^{-1}(Y - F)$ であるから $f^{-1}(F)$ は X の閉集合である．(2) ⇒ (1) も同様に証明される．

補題 38. X, Y, Z を位相空間とし，A を X の部分空間とする．このときつぎの (1), (2), (3) がなりたつ．

(1) 包含写像 $i: A \to X$ は連続である．

(2) 連続写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ の合成写像 $gf: X \to Z$ は連続である．

(3) 連続写像 $f: X \to Y$ の A への制限 $f|A: A \to Y$ は連続である．

証明 (1), (2) はそれぞれ $i^{-1}(O) = O \cap A$, $(gf)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O))$ より明らかであろう．(3) $f|A$ は包含写像 $i: A \to X$ と f との合成写像であるから連続である．

補題 39. X, Y を位相空間とし，$F_1, \cdots, F_n$ を X の有限閉被覆とする（すなわち

$F_1, \cdots, F_n$ は X の閉集合であって $X = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ とする). 連続写像 $f_i : F_i \to Y$, $i = 1, \cdots, n$ が

$$f_i | F_i \cap F_j = f_j | F_i \cap F_j, \qquad i, j = 1, \cdots, n$$

をみたしているならば, 写像 $f: X \to Y$ を

$$x \in X \text{ が } x \in F_i \text{ ならば } f(x) = f_i(x)$$

と定義すると, f は連続である.

証明　$x \in X$ が $x \in F_i \cap F_j$ のとき $f_i(x) = f_j(x)$ であるから, f は (i のとり方によらず) 定義される. さて Y の閉集合 F に対して $f^{-1}(F) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(F)$ であるが, f_i が連続であるから $f_i^{-1}(F)$ は F_i の閉集合である. しかるに F_i は X の閉集合であるから $f_i^{-1}(F)$ も X の閉集合である. そして $f^{-1}(F)$ は閉集合 $f_i^{-1}(F)$ の有限個の和集合であるから閉集合である. よって f は連続である.

例 84.　X を位相空間とし, I, I_1, I_2 をそれぞれ閉区間 $[0, 1]$, $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$ とする. 2つの連続写像 $f_1 : I_1 \to X$, $f_2 : I_2 \to X$ が $f_1(1/2) = f_2(1/2)$ をみたすならば

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & 0 \leqq t \leqq 1/2 \\ f_2(t) & 1/2 \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

により定義される写像 $f: I \to X$ は連続である (補題 39).

定義　X, Y を位相空間とする. 写像 $f: X \to Y$ が全単射であり, かつ f とその逆写像 f^{-1} がともに連続であるとき, f を**同相写像**という. 2つの位相空間 X と Y の間に同相写像 f が存在するとき, X と Y は**位相空間として同型**である, または**同相**であるといい, 記号 $X \simeq Y$ で表わす.

2つの位相空間 X, Y が同相であるための必要十分条件は $gf = 1_X$, $fg = 1_Y$ をみたす2つの連続写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ が存在することである. 補題3で示したように, 群 (または K-右加群) においては, $f: G \to G'$ が準同型な全単射であれば逆写像 f^{-1} は自動的に準同型となったが, 位相空間では $f: X \to Y$ が連続な全単射であっても逆写像 f^{-1} は連続となるとは限らない (例 86). (f^{-1} が自動的に連続になるための十分条件の1つが命題 49 である).

例 85.　$\boldsymbol{R}$ と開区間 $(0, 1)$ とは同相である : $\boldsymbol{R} \simeq (0, 1)$. 実際, 写像 $f: (0, 1) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = -\cot \pi x$ は同相写像である.

例 86.　実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ に離散位相を導入した位相空間を $\boldsymbol{R}'$ とし, $\boldsymbol{R}$ に普通の位相 (例 66) を導入した位相空間を $\boldsymbol{R}$ とする. 写像 $f: \boldsymbol{R}' \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x$ は連続な全単射

であるが f^{-1} は連続ではない．さらに $\boldsymbol{R}'$ と $\boldsymbol{R}$ は同相ではない：$\boldsymbol{R}' \not\approx \boldsymbol{R}$．実際，$\boldsymbol{R}'$ では1点は $\boldsymbol{R}'$ の開集合であるが，$\boldsymbol{R}$ では1点は $\boldsymbol{R}$ の開集合でないからである．

定義　X, Y を位相空間とする．写像 $f: X \to Y$ が条件

X の任意の開集合 O に対して $f(O)$ が Y の開集合である

をみたすとき f を**開写像**という．同様に写像 $f: X \to Y$ が条件

X の任意の閉集合 F に対して $f(F)$ が Y の閉集合である

をみたすとき f を**閉写像**という．

つぎの補題は明らかである．

補題40.　X, Y を位相空間とする．連続な全単射 $f: X \to Y$ が開写像（または閉写像）であれば f は同相写像である．

（3）閉包

X を位相空間とする．X の部分集合 A に対して A を含む最小の（X の）閉集合を $\bar{A}$ で表わし，$\bar{A}$ を A の**閉包**という．$\bar{A}$ は A を含むすべての閉集合 F の共通集合である：

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subset F} F$$

明らかに X の部分集合 A が X の閉集合であるための必要十分条件は $\bar{A} = A$ である．

補題41.　X を位相空間とする．X の任意の部分集合 A, B に対して

（1）$\bar{\phi} = \phi$

（2）$A \subset \bar{A}$

（3）$\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

（4）$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

がなりたつ．

証明　(1), (2) は明らかである．(3) $\bar{A}$ は閉集合であるから $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ である．(4) $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ は (2) より明らかである．$\bar{A} \cup \bar{B}$ は $A \cup B$ を含む閉集合であるから $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ である．したがって $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ となる．

補題42.　X を位相空間とし，A を X の部分集合とする．このとき

$$a \in \bar{A} \iff a \text{ の任意の近傍 } V \text{ に対して } V \cap A \neq \phi$$

がなりたつ．

証明　$a \in \bar{A}$ とする．a のある近傍 V に対して $V \cap A = \phi$ であるとしよう．このとき $A \subset X - V$ となるが $X - V$ が閉集合であるから $\bar{A} \subset X - V$，よって $\bar{A} \cap V = \phi$ となる．しかるに $a \in \bar{A} \cap V = \phi$ であるから矛盾である．ゆえに a の任意の近傍 V に

対して $V\cap A\neq\phi$ となる．逆に $a\notin\bar{A}$ とするとき，$V=X-\bar{A}$ とおくと V は $V\cap A=\phi$ をみたす a の近傍である．よって補題が証明された．

補題43. X を位相空間とし，A を X の部分空間とする．A の部分集合 B の A における閉包（B を含む最小の A の閉集合）を $\tilde{B}$ で表わすと $\tilde{B}=\bar{B}\cap A$ である．

証明 $\bar{B}\cap A$ は B を含む A の閉集合であるから $\tilde{B}\subset\bar{B}\cap A$ である．逆に C を B を含む A の閉集合とする．C は $C=F\cap A$（F は X の閉集合）と表わされるので $B\subset C\subset F$ である．閉包をとり $\bar{B}\subset\bar{F}=F$ となる．ゆえに $\bar{B}\cap A\subset F\cap A=C$ となる．よって $\bar{B}\cap A$ は B を含む最小の A の閉集合である．すなわち $\tilde{B}=\bar{B}\cap A$ である．

写像 $f: X\to Y$ が連続であるための条件を閉包を用いて表わしておこう．

補題44. X, Y を位相空間とする．写像 $f: X\to Y$ が連続であるための必要十分条件は，X の任意の部分集合 A に対して

$$f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$$

がなりたつことである．

証明 f が連続であるとする．$\overline{f(A)}$ は閉集合であるから $f^{-1}(\overline{f(A)})$ も閉集合である．しかるに $f(A)\subset\overline{f(A)}$ より $A\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ となるが，これに閉包をとり $\bar{A}\subset\overline{f^{-1}(\overline{f(A)})}=f^{-1}(\overline{f(A)})$ となる．よって $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$ である．逆に任意の部分集合 A に対して $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$ がなりたつとしよう．F を Y の閉集合とするとき，$f(\overline{f^{-1}(F)})\subset\overline{ff^{-1}(F)}\subset\bar{F}=F$ より $\overline{f^{-1}(F)}\subset f^{-1}(F)$ となる．よって $f^{-1}(F)$ は X の閉集合となり f の連続であることが証明された．

（4） 基本近傍系

集合 X に位相を導入するために X の開集合族を指定したが，つぎのような基本近傍系を指定しても X に位相を与えることができることを示そう．

定義 集合 X の各点 x に，つぎの 3 つの条件をみたす X の部分集合族 $\mathfrak{U}(x)$ が与えられているとする：

（1） $U\in\mathfrak{U}(x)$ ならば $x\in U$ である．

（2） $U, V\in\mathfrak{U}(x)$ ならば，$W\subset U\cap V$ をみたす $W\in\mathfrak{U}(x)$ が存在する．

（3） $U\in\mathfrak{U}(x)$, $y\in U$ ならば，$V\subset U$ をみたす $V\in\mathfrak{U}(y)$ が存在する．

このとき $\mathfrak{U}(x)$ を x の**基本近傍系**といい，$\mathfrak{U}(x)$ に属する集合を x の**基本近傍**という．

例87. X を距離空間とする．$x\in X$ に対して

$$\mathfrak{U}(x)=\{U_\varepsilon(x)\,|\,\varepsilon>0\}$$

とおくと $\mathfrak{U}(x)$ は x における基本近傍系になる，すなわち基本近傍系の条件 (1) (2) (3) をみたしている．

例 88. X を位相空間とする．$x\in X$ に対して

$$\mathfrak{U}(x)=\{U\,|\,U \text{は} x \text{を含む開集合}\}$$

とおくと $\mathfrak{U}(x)$ は x における基本近傍系になる．

集合 X の各点 x に基本近傍系 $\mathfrak{U}(x)$ が与えられているとする．このとき X の部分集合 O が (X の) 開集合であることをつぎのように定義する：

O の任意の点 x に対して，O に含まれる x の基本近傍 V が存在する：

$$V\subset O,\ V\in\mathfrak{U}(x)$$

このようにして定義した (X の) 開集合の全体の族 $\mathbf{O}$ により X が位相空間になることは，距離空間 X が ε－近傍系を基本近傍系とすると X が位相空間となる証明と同じである (67 頁)．その証明には基本近傍系の条件 (1) (2) しか用いない．条件 (3) は基本近傍が開集合であることを示している．

補題 45. X, Y をそれぞれ基本近傍系 $\mathfrak{U}(x), x\in X$; $\mathfrak{U}(y), y\in Y$ から導かれた位相空間とする．写像 $f: X\to Y$ に対してつぎの (1), (2) がなりたつ．

(1) 任意の $x\in X$ と任意の $V\in\mathfrak{U}(f(x))$ に対して，$f(U)\subset V$ をみたす $U\in\mathfrak{U}(x)$ が存在するならば，f は連続である．逆も正しい．

(2) 任意の $x\in X$ と任意の $U\in\mathfrak{U}(x)$ に対して，$V\subset f(U)$ をみたす $V\in\mathfrak{U}(f(x))$ が存在するならば，f は開写像である．逆も正しい．

証明 (1) O を Y の開集合とする．$x\in f^{-1}(O)$ とするとき，$f(x)\in O$ であり，かつ O が開集合であるから，$V\in\mathfrak{U}(f(x))$ が存在して $V\subset O$ となる．V に対して $f(U)\subset V$ となる $U\in\mathfrak{U}(x)$ をとると $f(U)\subset O$ となるから $U\subset f^{-1}(O)$ である．これは $f^{-1}(O)$ が X の開集合であることを示している．

(2) O を X の開集合とする．点 $y\in f(O)$ をとり $y=f(x), x\in O$ であるとする．O が開集合であるから，$U\subset O$ となる $U\in\mathfrak{U}(x)$ がある．この U に対し $V\subset f(U)$ をみたす $V\in\mathfrak{U}(y)$ をとると $V\subset f(O)$ である．これは $f(O)$ が Y の開集合であることを示している．(1), (2) の逆の証明も容易である．

(5) 直積空間

定義 X, Y を位相空間とする．直積集合 $X\times Y$ の部分集合 O が $X\times Y$ の開集合で

あることをつぎのように定義する.

O が $U\times V$ (U, V はそれぞれ X, Y の開集合) の形の集合の和集合で表わされる : $O=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda\times V_\lambda)$

このようにして定義した $X\times Y$ の開集合の全体は $X\times Y$ に位相を与える. この位相空間 $X\times Y$ を X と Y の**直積空間**という.

距離空間 X, Y の直積距離空間 $X\times Y$ は X, Y, $X\times Y$ をそれぞれ位相空間とみるとき $X\times Y$ は X と Y の直積空間になっている.

補題46. X, Y を位相空間とする.

$$p:X\times Y\longrightarrow X,\qquad q:X\times Y\longrightarrow Y$$

をそれぞれ X, Y への射影とするならば, p, q は連続な (全射) 開写像である.

証明 U を X の開集合とするとき, $p^{-1}(U)=U\times Y$ であるから $p^{-1}(U)$ は $X\times Y$ の開集合である. よって p は連続である. つぎに p が開写像であることを示そう. $O=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda\times V_\lambda)$ を $X\times Y$ の開集合とする. $O=\phi$ のときは $p(\phi)=\phi$ であるから $O\neq\phi$ であるとしよう. また $U_\lambda\times V_\lambda=\phi$ ならばその λ は Λ の中から除いておいてよい. このとき $p(O)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ であるから $p(O)$ は X の開集合である. よって p は開写像である. q についても同様である.

補題47. X, Y を位相空間とし, A, B をそれぞれ X, Y の部分集合とするとき, 直積空間 $X\times Y$ において

$$\overline{A\times B}=\bar{A}\times\bar{B}$$

がなりたつ.

証明 $\bar{A}\times\bar{B}$ は $A\times B$ を含む閉集合である. 実際,

$$X\times Y-\bar{A}\times\bar{B}=(X-\bar{A})\times Y\cup X\times(Y-\bar{B})$$

は $X\times Y$ の開集合であるからである. したがって $\overline{A\times B}\subset\bar{A}\times\bar{B}$ である. 逆に $A\times B$ を含む任意の閉集合 F をとれば $X\times Y-F$ は開集合であるから

$$X\times Y-F=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda\times V_\lambda)$$

(U_λ, V_λ はそれぞれ X, Y の開集合) と表わされる. このとき, $A\times B\subset F$ であるから, 各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $U_\lambda\cap A=\phi$ または $V_\lambda\cap B=\phi$ がなりたつ. これより $U_\lambda\cap\bar{A}=\phi$ または $V_\lambda\cap\bar{B}=\phi$ が得られる. 実際, $U_\lambda\cap A=\phi$ より $A\subset X-U_\lambda$, 閉包をとり $\bar{A}\subset\overline{X-U_\lambda}\subset X-U_\lambda$, よって $U_\lambda\cap\bar{A}=\phi$ となる. $V_\lambda\cap\bar{B}=\phi$ も同様である. いずれの場合にも $(U_\lambda\times V_\lambda)\cap(\bar{A}\times\bar{B})=\phi$ となる. したがって $(X\times Y-F)\cap(\bar{A}\times\bar{B})=$

ϕ, すなわち $\bar{A}\times\bar{B}\subset F$ となる. よって $\bar{A}\times\bar{B}$ は $A\times B$ を含む最小の閉集合であることがわかり $\overline{A\times B}=\bar{A}\times\bar{B}$ であることが証明された.

(6) コンパクト集合

さきに $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合をコンパクトと定義したが, ここで一般の位相空間においてコンパクトの概念を定義し, その性質を調べよう.

X を位相空間とする. X の開集合からなるある集合族 U_λ, $\lambda\in\Lambda$ が $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ をみたすとき U_λ, $\lambda\in\Lambda$ を X の**開被覆**という. Λ の元の数が有限個であるとき U_λ, $\lambda\in\Lambda$ を**有限開被覆**という.

定義 X を位相空間とする. X の任意の開被覆の中からつねに有限開被覆を選ぶことができるとき, X は**コンパクト**であるという. すなわち

$$X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda,\qquad U_\lambda \text{ は } X \text{ の開集合}$$

ならば, 有限個の $\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in\Lambda$ が存在して

$$X=\bigcup_{i=1}^{m}U_{\lambda_i}$$

となることである.

位相空間 X の部分空間 A がコンパクトであることをつぎのようにいうことができる:

$$A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda,\qquad U_\lambda \text{ は } X \text{ の開集合}$$

ならば, 有限個の $\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in\Lambda$ が存在して

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{m}U_{\lambda_i}$$

となる.

実際, A がこの条件をもつとしよう. A の開集合は X の開集合 U を用いて $U\cap A$ と表わされるので, A の開被覆は $A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda\cap A)$ (U_λ は X の開集合) の形をしている. よって $A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ となる. 条件より有限個の $\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in\Lambda$ が存在して $A\subset\bigcup_{i=1}^{m}U_{\lambda_i}$ となるから, $A=\bigcup_{i=1}^{m}(U_{\lambda_i}\cap A)$ となり A がコンパクトであることがわかった. 逆に A がコンパクトであれば上の条件をみたすことも同様にして示すことができる.

補題 48. (1) コンパクト空間 X の閉集合 F はコンパクトである.

(2) Hausdorff 空間 X のコンパクト部分空間 F は X の閉集合である.

証明 (1) $F\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ (U_λ は X の開集合) とする. このとき $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\cup(X-F)$ となり $X-F$ も開集合であるから, これは X の開被覆である. X はコンパクトであるから有限被覆 $X=\bigcup^{m}U_{\lambda_i}\cup(X-F)$ を選び出すことができる. このとき明らかに

$F \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i}$ である．よって F はコンパクトである．

（2） $X-F$ が X の開集合であることを示そう．点 $a \in X-F$ をとる．各点 $x \in F$ に対して，$a \neq x$ であり X が Hausdorff 空間であるから，$U_x \cap V_x = \phi$ となる a の近傍 U_x と x の近傍 V_x が存在する．当然 $F \subset \bigcup_{x \in F} V_x$ となるが F がコンパクトであることより，有限個の F の点 $x_1, \cdots, x_m$ が存在して $F \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$ となる．このとき，$U = \bigcap_{i=1}^{m} U_{x_i}$ とおくと U は a の近傍であって，かつ

$$U \cap F \subset (\bigcap_{i=1}^{m} U_{x_i}) \cap (\bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{m} (U_{x_i} \cap V_{x_i}) = \phi$$

となる．すなわち各点 $a \in X-F$ に対して $U \subset X-F$ をみたす a の近傍 U がとれた．これは $X-F$ が開集合であることを示している．したがって F は閉集合である．

つぎの命題はすでにコンパクトであることがわかっている空間 X を用いて，Y がコンパクトであることを証明するのによく利用される．

命題 49. X, Y を位相空間とし，$f: X \to Y$ を連続な全射とする．このとき X がコンパクトならば Y もコンパクトである．

証明 $Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ を Y の開被覆とする．f が連続であるから X の開被覆 $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(V_\lambda)$ を得る．しかるに X はコンパクトであるから，有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \Lambda$ が存在して $X = \bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(V_{\lambda_i})$ となる．これに f を施すと，f が全射であるから $Y = \bigcup_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$ となる．したがって Y はコンパクトである．

つぎの命題はコンパクト空間のもつ性質のうちで重要であり，また非常に有用なものの1つである．

命題 50. X をコンパクト空間とし，Y を Hausdorff 空間とする．このとき連続な全単射 $f: X \to Y$ は同相写像である．

証明 F を X の閉集合とするとき，F の像 $f(F)$ はコンパクトである（命題 49）．Y は Hausdorff 空間であるから $f(F)$ は Y の閉集合である（補題 48 (2)）．すなわち f が閉写像であることが示された．f は連続な全単射でかつ閉写像であるから f は同相写像である（補題 40）．

命題 50 と同じ内容であるが，つぎの形でもよく用いられる．

命題 51. X をコンパクト空間とし，Y を Hausdorff 空間とする．このとき，写像 $f: X \to Y$ が連続な単射であれば写像 $f: X \to f(X)$ は同相写像である[†]．したがって X

[†] 写像 $f: X \to Y$ が同相写像 $f: X \to f(X)$ を誘導するとき f を**単射同相写像**または**埋め込み**という．このとき点 $x \in X$ を点 $f(x) \in Y$ と同一視して X を Y の部分空間とみなすことが多い：$X \subset Y$．

と $f(X)$ は位相空間として同型である：$X \simeq f(X)$.

命題 52.　X, Y を位相空間とするとき

$$X \times Y \text{がコンパクト} \iff X, Y \text{がコンパクト}$$

がなりたつ.

証明　$p: X \times Y \to X$, $q: X \times Y \to Y$ をそれぞれ X, Y への射影とするとき，p, q は連続な全射である（補題 46）. したがって $X \times Y$ がコンパクトであれば X, Y もコンパクトである（命題 49）. 逆に X, Y がコンパクトであると仮定し，$X \times Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ をその開被覆とする. この中から有限被覆を選び出せることを示そう. 各開集合 O_λ は $U \times V$（U, V はそれぞれ X, Y の開集合）の形の集合のいくらかの和集合であるから（添数 Λ はかわるが）初めから $X \times Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \times V_\lambda)$ の形の開被覆であると仮定しておいてよい. さて，まず1点 $x \in X$ を固定して考えよう. Y がコンパクトであるから，これに同相な $x \times Y$ もコンパクトである. よって $x \times Y$ の有限開被覆

$$x \times Y \subset \bigcup_{j=1}^{n} (U_j \times V_j)$$

がとりだせる. このとき，$x \in U_j$ $(j = 1, \cdots, n)$, $Y = \bigcup_{j=1}^{n} V_j$ となっている. $U_x = \bigcap_{j=1}^{n} U_j$ とおくと，U_x は x の近傍であり，かつ

$$U_x \times Y = U_x \times \bigcup_{j=1}^{n} V_j = \bigcup_{j=1}^{n} (U_x \times V_j) \subset \bigcup_{j=1}^{n} (U_j \times V_j)$$

がなりたつ. このようにすると，各点 $x \in X$ に対して，x の近傍 U_x と $U_x \times Y$ の有限開被覆 $\bigcup_{j=1}^{n} (U_j \times V_j)$ を選ぶことができる. X の開被覆 $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ をつくると X がコンパクトであるから，有限個の $x_1, \cdots, x_m \in X$ を選んで $X = \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$ にできる. したがって

$$X \times Y = \left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}\right) \times Y = \bigcup_{i=1}^{m} (U_{x_i} \times Y)$$

となる. 各 $U_{x_i} \times Y$ は有限個の $U_j \times V_j$ で覆われるから $X \times Y$ もそうである. よって $X \times Y$ のコンパクトであることが証明された.

補題 53.　X をコンパクト距離空間とし，$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ を X の開被覆とする. このときつぎの性質をもつ正数 ε[†] が存在する：任意の $x \in X$ に対して x の ε-近傍 $U_\varepsilon(x)$ はいずれかの O_λ に含まれる.

---

† この ε（またはこのような ε の上限）を **Lebesgue 数** という.

証明　各 $x \in X$ に対し，x を含む O_λ をとる．O_λ は開集合であるから，x の $\varepsilon(x)$-近傍 $U_{\varepsilon(x)}(x)$ を $U_{\varepsilon(x)}(x) \subset O_\lambda$ のようにとることができる．X の開被覆 $X = \bigcup_{x \in X} U_{\varepsilon(x)/2}(x)$ をつくると，X がコンパクトであるから，有限個の $x_1, \cdots, x_m \in X$ が存在して $X = \bigcup_{i=1}^{m} U_{\varepsilon(x_i)/2}(x_i)$ となる．そこで $\varepsilon = \min\{\varepsilon(x_1), \cdots, \varepsilon(x_m)\}/2$ とおくと ε は求める性質をみたしている．実際，任意に $x \in X$ をとると，x は $U_{\varepsilon(x_1)/2}(x_1), \cdots, U_{\varepsilon(x_m)/2}(x_m)$ のいずれかに含まれている．いま $x \in U_{\varepsilon(x_k)/2}(x_k)$ であるとすると $\varepsilon \leqq \varepsilon(x_k)/2$ であるから，$y \in U_\varepsilon(x)$ ならば $d(y, x_k) \leqq d(y, x) + d(x, x_k) < \varepsilon + \varepsilon(x_k)/2 \leqq \varepsilon(x_k)$ となる．したがって $U_\varepsilon(x) \subset U_{\varepsilon(x_k)}(x_k)$ である．しかるに $U_{\varepsilon(x_k)}(x_k)$ はある O_λ に含まれていたから，$U_\varepsilon(x)$ も O_λ に含まれている．よって補題が証明された．

（7）コンパクトと同値な条件

コンパクトと同値な条件をいくつかあげておこう（命題 54, 56, 58）．

集合 X の部分集合族 A_λ, $\lambda \in \Lambda$ が，任意の有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \Lambda$ に対して $\bigcap_{i=1}^{m} A_{\lambda_i} \neq \phi$ の性質をもつとき，A_λ, $\lambda \in \Lambda$ は**有限交叉性**をもつという．

命題 54.　X を位相空間とする．つぎの条件 (1), (2) はいずれも X がコンパクトであるための必要十分条件である．

（1）　有限交叉性をもつ X の任意の閉集合族 F_λ, $\lambda \in \Lambda$ に対して $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \phi$ である．

（2）　有限交叉性をもつ X の任意の部分集合族 A_λ, $\lambda \in \Lambda$ に対して $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{A}_\lambda \neq \phi$ である．

証明　(1)　X をコンパクトとする．有限交叉性をもつ X の閉集合族 F_λ, $\lambda \in \Lambda$ に対して $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \phi$ となるとすると，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda}(X - F_\lambda) = X$ となり，X の開被覆を得る．X がコンパクトであるから，有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \Lambda$ が存在して $\bigcup_{i=1}^{m}(X - F_{\lambda_i}) = X$ となる．ゆえに $\bigcap_{i=1}^{m} F_{\lambda_i} = \phi$ となり，F_λ, $\lambda \in \Lambda$ が有限交叉性をもつことに反する．よって (1) が示された．逆に (1) ならば X がコンパクトであることも補集合をとって考えると，上述と同様にして証明することができる．(2) ⇒ (1) は自明であり (1) ⇒ (2) も F_λ として $\overline{A}_\lambda$ を用いると明らかである．

定義　X を位相空間とし，A を X の部分集合とする．点 $x \in X$ の任意の近傍 U に対して，$U \cap A$ が x 以外の点を含むとき，すなわち $U \cap (A - \{x\}) \neq \phi$ であるとき，x は A の**集積点**であるという．

補題 55.　(Bolzano-Weierstrass)　コンパクト空間 X の任意の無限集合 A は少くと

も1つ集積点をもつ.

証明　X のいかなる点も A の集積点でないとすると，各点 $x \in X$ に対し，x のある近傍 U_x が存在して $U_x \cap A = \phi$ であるか，または $U_x \cap A = \{x\}$ となる．X の開被覆 $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ をつくると，X がコンパクトであることより有限個の点 $x_1, \cdots, x_m$ が存在して $X = \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$ となる．このとき $A = \bigcup_{i=1}^{m} (U_{x_i} \cap A)$ となる．しかるに各 $U_{x_i} \cap A$ はたかだか1点しか含まないので A は有限集合となり，A が無限集合であるという仮定に反する．よって少なくとも1点 $x \in X$ は A の集積点である.

命題[†] **56.**　X をコンパクト距離空間とするならば，X の任意の点列 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$ は収束する部分列 $x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_m}, \cdots$ を含む.

証明　$x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$ の中に同じ点 x が無数に含まれているならば明らかに x に収束する部分列を含むから，そうでないと仮定しておこう．このとき集合 $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots\}$ は無限集合である．ゆえに A は集積点 x をもつ（補題55）．A の中で x と一致する点はあってもたかだか有限個であるから A の中から除いておくことにすれば，初めから A の点はすべて x と異なると仮定しておいても一般性を失わない．さて，まず $d(x_{k_1}, x) < 1$ となる $x_{k_1} \in A$ をとる．帰納法により部分列 $x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_m}$ を $d(x_{k_j}, x) < \dfrac{1}{j}$ $(j = 1, \cdots, m)$ のようにとり出せたとする．$\varepsilon = \min\left\{\dfrac{1}{m+1}, d(x_1, x), d(x_2, x), \cdots, d(x_{k_m}, x)\right\}$ とおくと，$\varepsilon > 0$ であるから，x が集積点であることより $d(x_{k_{m+1}}, x) < \varepsilon$ となる点 $x_{k_{m+1}} \in A$ をとることができる．このとき $k_m < k_{m+1}$ であり，かつ $d(x_{k_{m+1}}, x) < \dfrac{1}{m+1}$ である．このようにして部分列 $x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_m} \cdots$ をつくると $\lim_{m \to \infty} x_{k_m} = x$ である.

$\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合をコンパクト集合と名付けた定義と，位相空間 $\boldsymbol{R}^n$ のいわゆるコンパクト集合との定義が一致することを示そう．そのためにはつぎの補題が基本的である.

補題 57.　(Heine-Borel) 閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである．すなわち

$$[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda, \qquad J_\lambda = (\alpha_\lambda, \beta_\lambda) \text{ は開区間}$$

ならば有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \Lambda$ が存在して

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{m} J_{\lambda_i}$$

となる.

---

† この命題の逆も正しいが，本書では用いないので証明を与えなかった.

証明　$[a, b]$ の有限部分開被覆を選びだせないとしよう．$c=\dfrac{a+b}{2}$ とおくと $[a, c]$, $[c, b]$ のいずれか一方は有限部分開被覆をもたない．その区間を $[a_1, b_1]$ としよう．さらにこの区間 $[a_1, b_1]$ を2等分すると，そのいずれか一方は有限部分開被覆をもたない．その区間を $[a_2, b_2]$ とする．以下このような作り方を繰返すと閉区間の列

$$[a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \cdots$$

$b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ を得る．$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ であるから $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{x\}$ となる1点 x が存在する†．$x \in [a, b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda$ であるから，ある λ に対して $x \in J_\lambda = (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ となる．$\alpha_\lambda < x$ であるから $\alpha_\lambda \notin \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$，したがって $\alpha_\lambda < a_{n_1}$ をみたす n_1 が存在する．同様に $x < \beta_\lambda$ であるから，$b_{n_2} < \beta_\lambda$ をみたす n_2 が存在する．$n = \max\{n_1, n_2\}$ とおくと $\alpha_\lambda < a_n < x < b_n < \beta_\lambda$，したがって $[a_n, b_n] \subset J_\lambda$ となる．このように $[a_n, b_n]$ は1つの J_λ で覆えたが $[a_n, b_n]$ は有限個の J_λ では覆えない筈であった．これは矛盾である．よって補題が証明された．

命題†† 58.　$\boldsymbol{R}^n$ の部分空間 X がコンパクトであるための必要十分条件は X が $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合であることである．

証明　X がコンパクトであるとする．各点 $x \in X$ に対して半径1の近傍 $U(x)$ をとり，X の開被覆 $X \subset \bigcup_{x\in X} U(x)$ をつくる．X がコンパクトであるから，有限個の点 $x_1, \cdots, x_m$ が存在して $X \subset U(x_1) \cup \cdots \cup U(x_m)$ となる．これより X が有界であることがわかる．また X は Hausdorff 空間 $\boldsymbol{R}^n$（補題37）のコンパクト部分空間であるから $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合である（補題48(2)）．逆に X が $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合であるとする．X が有界であるから $X \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ となる閉区間 $[a_i, b_i]$, $i = 1, \cdots, n$ がとれる．各 $[a_i, b_i]$ はコンパクトである（補題57）から，その直積空間 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ もコンパクトであり（命題52），X はその閉集合となるからコンパクトである（補題48(1)）．

(8)　弧状連結集合

X を位相空間とする．閉区間 $I = [0, 1]$ から X への連続写像 $u: I \to X$ を X の**道**という．$u(0)$ を道 u の**始点**，$u(1)$ を u の**終点**といい，u を $u(0)$ と $u(1)$ とを結ぶ道ともい

† この事実は **Cantor の区間縮小定理** と呼ばれている．

†† この命題は一般の距離空間ではなりたたない．すなわち，距離空間 X の有界閉集合はコンパクトであるとは限らない．たとえば Hilbert 空間の単位球面は有界閉集合であるがコンパクトではない．

う．u を点 x_0 と点 x_1 を結ぶ道，v を点 x_1 と点 x_2 を結ぶ道とするとき，道 $w: I \to X$ を

$$w(t) = \begin{cases} u(2t) & 0 \leqq t \leqq 1/2 \\ v(2t-1) & 1/2 \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

で定義すると，w は x_0 と x_2 を結ぶ道となる（例 84）．w を u に v をつないだ道といい，$u \cdot v$ で表わす．また x_0 と x_1 を結ぶ道 u に対して道 $\bar{u}: I \to X$ を

$$\bar{u}(t) = u(1-t)$$

で定義し，$\bar{u}$ を u の**逆の道**[†]という．

定義　位相空間 X の任意の2点 x, y に対して x と y を結ぶ X の道が存在するとき，X は**弧状連結**[††]であるという．

弧状連結の定義を X の1点 x_0 を固定しておいて，X の任意の点 x に対して x_0 と x を結ぶ X の道が存在するとしてもよい．実際，2点 x, y に対して，x_0 と x, x_0 と y を結ぶ道をそれぞれ u, v とすると，$\bar{u} \cdot v$ は x と y を結ぶ道である．

つぎの命題はすでに弧状連結であることがわかっている空間 X を用いて，Y が弧状連結であることを証明するのによく利用される．

命題 59.　X, Y を位相空間とし，$f: X \to Y$ を連続な全射とする．このとき，X が弧状連結であれば Y も弧状連結である．

証明　Y の任意の2点 y_0, y_1 に対して，f が全射であるから，$f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$ となる X の点 x_0, x_1 が存在する．X は弧状連結であるから x_0 と x_1 を結ぶ X の道 $u: I \to X$ をとると，$fu: I \to Y$ は y_0 と y_1 を結ぶ道である．よって Y は弧状連結である．

命題 60.　X, Y を位相空間とするとき

$$X \times Y \text{ が弧状連結} \iff X, Y \text{ は弧状連結}$$

がなりたつ．

証明　$p: X \times Y \to X$, $q: X \times Y \to Y$ をそれぞれ X, Y への射影とするとき，p, q は連続な全射である（補題 46）．したがって $X \times Y$ が弧状連結であれば X, Y も弧状連結である（命題 59）．逆に X, Y が弧状連結であるとする．$X \times Y$ の2点 $a_0 = (x_0, y_0)$, $a_1 = (x_1, y_1)$ に対して，x_0 と x_1 を結ぶ X の道 u, y_0 と y_1 を結ぶ Y の道 v をとる

---

† 道 u の逆の道を u^{-1} で表わすのが普通である．しかし本書では u^{-1} を異なった道の意味で用いる（198 頁）ので記号 $\bar{u}$ を用いた．

†† 位相空間 X の**連結**の定義としてつぎの定義もよく用いられる：$X = F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2 = \phi$, F_1, F_2 は X の閉集合ならば $F_1 = \phi$ または $F_2 = \phi$．位相空間 X が弧状連結ならばこの意味の連結であるが，逆は必ずしもなりたたない．しかし多様体では連結ならば弧状連結となる．したがって多様体である球面，射影空間，古典群では2つの連結の定義は一致している．

と，$w: I \to X \times Y$, $w(t) = (u(t), v(t))$ は a_0 と a_1 を結ぶ $X \times Y$ の道である．よって $X \times Y$ は弧状連結である．

位相空間 X において

$$x \sim y \iff x \text{ と } y \text{ を結ぶ } X \text{ の道が存在する}$$

と定義すると関係 ~ は同値法則をみたす．X のこの関係 ~ による等化集合 $X/\sim$ の各類を X の**弧状連結成分**という．点 x を含む弧状連結成分は x と道で結べる点全体のことである．

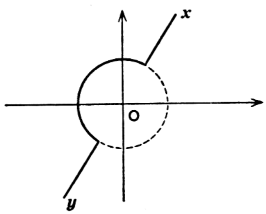
例89.　1点からなる空間は弧状連結である．

例90.　$\boldsymbol{R}$ は弧状連結である．したがってその直積空間である $\boldsymbol{R}^n$ も弧状連結である（命題60）．

例91.　$\boldsymbol{Z}$ は弧状連結ではない．$\boldsymbol{Z}$ の弧状連結成分は1点からなる．さらに一般に，離散空間 X の弧状連結成分は1点からなりたっている．

例92.　$S^0 = \{-1, 1\}$ は弧状連結ではない．$\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{R} - \{0\}$ も弧状連結ではない．S^0, $\boldsymbol{R}^*$ の弧状連結成分の個数はともに2である．

例93.　$\boldsymbol{R}^{n+1} - \{0\}$ $(n \geqq 1)$ は弧状連結である．実際，$\boldsymbol{R}^{n+1} - \{0\}$ の2点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を直線で結ぶとよいが，もしその直線が原点0を通るときには右図のように回り道をするとよい．



定理4.　単位球面 S^n $(n \geqq 1)$ は弧状連結である．

証明　写像 $f: \boldsymbol{R}^{n+1} - \{0\} \to S^n$ を $f(x) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ と定義すると f は連続な全射である．$\boldsymbol{R}^{n+1} - \{0\}$ は弧状連結である（例93）から，その f による連続像として S^n は弧状連結である（命題59）．

(9)　可算開基

定義　X を位相空間とする．X につぎの性質をもつ可算個の開集合 $U_1, U_2, \cdots, U_m, \cdots$ が存在するとする：「X の任意の開集合 O，および O の任意の点 x に対して，$x \in U_m \subset O$ をみたす U_m が存在する」．このとき X は**可算開基**をもつ（または**第2可算公理**をみたす）という．

補題61.　(Lindelöf) X を可算開基をもつ位相空間とする．このとき X の任意の開被覆 $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ に対して，可算個の $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_i, \cdots \in \Lambda$ を選び出して $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_{\lambda_i}$ に

することができる.

証明　X の可算開基 $U_1, U_2, \cdots, U_m, \cdots$ をとり，この中から，いずれかの O_λ に対して $U_m \subset O_\lambda$ となっているもの全部をとり出し，$U_{m_1}, U_{m_2}, \cdots, U_{m_i}, \cdots$ とする．各 U_{m_i} に対して，$U_{m_i} \subset O_\lambda$ となる O_λ を1つとってそれを O_{λ_i} とする．このようにして，$O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, \cdots, O_{\lambda_i}, \cdots$ をとると $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_{\lambda_i}$ となっている．実際，任意に $x \in X$ をとると，x はある O_λ に含まれている：$x \in O_\lambda$．このとき $x \in U_m \subset O_\lambda$ となる U_m が存在するが，この U_m は上にとり出した $U_{m_1}, U_{m_2}, \cdots$ のうちにはいっているのでこれを U_{m_i} としよう．この U_{m_i} に対して O_{λ_i} をとると $x \in O_{\lambda_i}$ である．よって $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_{\lambda_i}$ である．

補題62.　X を可算開基をもつ位相空間とすると，X の部分空間 A も可算開基をもつ.

証明　$U_1, U_2, \cdots, U_m, \cdots$ を X の可算開基とすると，$U_1 \cap A, U_2 \cap A, \cdots, U_m \cap A, \cdots$ は A の可算開基になる.

補題63.　X, Y を可算開基をもつ位相空間とするとき，$X \times Y$ も可算開基をもつ.

証明　$U_1, U_2, \cdots, U_m, \cdots ; V_1, V_2, \cdots, V_n, \cdots$ をそれぞれ X, Y の可算開基とするとき，$U_m \times V_n$, $m, n = 1, 2, \cdots$ は $X \times Y$ の可算開基になる.

例94.　$\boldsymbol{R}$ は可算開基をもつ．実際，有理数の全体は可算集合であるから，それを $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ とするとき，$U_{1/m}(r_n) =$ 開区間 $\left(r_n - \dfrac{1}{m}, r_n + \dfrac{1}{m}\right)$, $m, n = 1, 2, \cdots$ が $\boldsymbol{R}$ の可算開基になる．したがってその直積空間である K^n, $M(n, K)$ も可算開基をもつ（補題63)．さらにそれらの部分空間である球面 S^n，射影空間 $KP(n-1)$，古典群 $GL(n, K)$, $SL(n, K)$, $G(n, K)$, $SG(n, K)$ はいずれも可算開基をもっている（補題62).

(10) 局所コンパクト空間とBaireの定理

定義　X を位相空間とする．X の各点 x に対し，$\overline{U}$ がコンパクトであるような x の近傍 U が存在するとき，X は**局所コンパクト**であるという.

コンパクト空間は明らかに局所コンパクトである.

補題64.　X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．このとき，各点 x の任意の近傍 U に対して，$\overline{V} \subset U$ かつ $\overline{V}$ がコンパクトであるような x の近傍 V が存在する.

証明　まずコンパクト Hausdorff 空間 X では補題が正しいことを示そう．実際，U を x の近傍とするとき $x \cap (X - U) = \phi$ であり，かつ x と $X - U$ は閉集合であるから，$x \in V$, $X - U \subset O$, $V \cap O = \phi$ をみたす開集合 V, O が存在する（補題48 (2) の証明の中で示されている)．このとき $V \subset X - O$ より $\overline{V} \subset \overline{X - O} = X - O \subset X - (X -$

$U) = U$ であり，かつ $\bar{V}$ はコンパクト空間 X の閉集合としてコンパクトである（補題48 (1)). さて X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，U を点 x の近傍とする．X が局所コンパクトであるから，x の近傍 W で $\overline{W}$ がコンパクトのものが存在する．$\overline{W}$ はコンパクト Hausdorff 空間であるから x の $\overline{W}$ における近傍 $U \cap W$ に対して，x の $\overline{W}$ における近傍 V を $\bar{V} \cap \overline{W} \subset U \cap W$ のようにとる（上述). このとき V は $U \cap W$ の開集合であるが，$U \cap W$ は X の開集合であるから V は X の開集合である．さらに $\bar{V} = \bar{V} \cap \overline{W} \subset U \cap W \subset U$ であり $\bar{V}$ がコンパクトであるから補題が証明された．

補題 65. （1） 局所コンパクト空間 X の閉集合 F はまた局所コンパクトである．

（2） 局所コンパクト Hausdorff 空間 X の開集合 O はまた局所コンパクト (Hausdorff) である．

証明 （1） 点 $x \in F$ に対して，X が局所コンパクトであるから $\bar{U}$ がコンパクトであるような x の近傍 U が存在する．このとき $U \cap F$ は F における x の近傍であり，その F における閉包 $\overline{U \cap F} \cap F$（補題43）は $\bar{U}$ の閉集合であるからコンパクトである．よって F は局所コンパクトである．

（2） 点 $x \in O$ に対して，$\bar{V} \subset O$ かつ $\bar{V}$ がコンパクトであるような x の近傍 V をとる（補題64）と，V の O における閉包 $\bar{V} \cap O$ は $\bar{V}$ であるから O は局所コンパクトである．

補題 66. X, Y が局所コンパクト空間ならば，$X \times Y$ も局所コンパクトである．

証明 点 $a = (x, y) \in X \times Y$ に対して，X, Y の局所コンパクトの仮定より X の開集合 U を $x \in U$, $\bar{U}$ がコンパクト，Y の開集合 V を $y \in V$, $\bar{V}$ がコンパクトであるようにとることができる．このとき $U \times V$ は a の近傍であり $\overline{U \times V} = \bar{U} \times \bar{V}$（補題47）はコンパクトである（命題52）から，$X \times Y$ は局所コンパクトである．

例 95. $\boldsymbol{R}^n$ は局所コンパクト空間である．実際，各点 $\boldsymbol{x}$ の ε-近傍 $U_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ に対して $\overline{U_\varepsilon(\boldsymbol{x})}$ はコンパクト（有界閉集合）であるからである．したがって K^n, $M(n, K)$ も局所コンパクトである（補題66).

つぎの命題は局所コンパクト空間のもつ重要な性質であり，**Baire の定理**または**カテゴリー定理**とよばれている．後程，開写像定理（命題74）の証明に用いる．

命題 67. (**Baire**) X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．このとき X が

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m, \qquad F_m \text{ は } X \text{ の閉集合}$$

であれば，少なくとも1つの F_m は X の開集合 O $(O \neq \phi)$ を含む．

証明　どの F_m も空でない開集合を含まないとしよう．X は局所コンパクトであるから，X の開集合 U_0 $(U_0 \neq \phi)$ で $\overline{U}_0$ がコンパクトのものが存在する．F_1 は空以外の開集合を含まないから $U_0 - F_1 \neq \phi$ である．ゆえに $U_0 - F_1$ の1点 x_1 の近傍 U_1 を $\overline{U}_1 \subset U_0 - F_1$, $\overline{U}_1$ がコンパクトであるようにとれる（補題64）．このとき $\overline{U}_1 \cap F_1 = \phi$, $\overline{U}_1 \subset U_0$ である．つぎに U_0, F_1 の代りに U_1, F_2 を用いると，同様にして X の開集合 U_2 $(U_2 \neq \phi)$ を $\overline{U}_2 \cap F_2 = \phi$, $\overline{U}_2 \subset U_1$ となるようにとれる．以下同様にして，X の開集合の列 $U_1, U_2, \cdots, U_m, \cdots$ $(U_m \neq \phi)$ を $\overline{U}_m \cap F_m = \phi$, $\overline{U}_m \subset U_{m-1}$ $(m = 1, 2, \cdots)$ をみたすようにとることができる．$\overline{U}_0$ はコンパクトで $U_0 \supset U_1 \supset \cdots \supset U_n \supset \cdots$ であるから $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \neq \phi$ である（命題54(2)）．しかるに $\phi \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \cap X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} (\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \cap F_m) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} (\overline{U}_m \cap F_m) = \phi$ となるので矛盾である．よって定理が証明された．

§3. 位 相 群

この節では群と位相空間の構造をあわせてもつ位相群を定義し，古典群が位相群であることを示すのを目的とする．また，つぎの節の準同型定理を証明する準備として開写像定理を証明しておこう．

(1) 位 相 群

定義　集合 G が**位相群**であるとは

(1)　G は群である．

(2)　G は位相空間である．

(3)　写像 $\mu: G \times G \to G$, $\nu: G \to G$ をそれぞれ $\mu(x, y) = xy$, $\nu(x) = x^{-1}$ と定義するとき，μ, ν は連続である．

の3つの条件をみたすことである．

(3) の条件はつぎのように1つにまとめることができる．

(4)　写像 $\mu': G \times G \to G$, $\mu'(x, y) = x^{-1}y$ は連続である．

また (3), (4) の条件は G の開集合の用語を用いて，それぞれ (5), (6) の条件にいいかえることもできる．

(5)　x, y を G の任意の2つの元とするとき，xy の任意の近傍 U に対して，$VW \subset$

U をみたす x の近傍 V と y の近傍 W が存在する．さらに x^{-1} の任意の近傍 U' に対して，$V'^{-1} \subset U'$ をみたす x の近傍 V' が存在する（補題45）．

（6） x, y を G の任意の2つの元とするとき，$x^{-1}y$ の任意の近傍 U に対して，$V^{-1}W \subset U$ をみたす x の近傍 V と y の近傍 W が存在する（補題45）．

G における閉包を用いるとこれらの条件からつぎの（7）または（8）を導くことができる．

（7） G の任意の部分集合 A, B に対して $\overline{A}\overline{B} \subset \overline{AB}$, $(\overline{A})^{-1} \subset \overline{A^{-1}}$ がなりたつ（補題44）．

（8） G の任意の部分集合 A, B に対して $(\overline{A})^{-1}\overline{B} \subset \overline{A^{-1}B}$ がなりたつ（補題44）．

また位相群 G の位相が距離空間から導かれているときには（3）の条件は

（9） $\lim_{m\to\infty} x_m = x$, $\lim_{m\to\infty} y_m = y$ ならば $\lim_{m\to\infty} x_m y_m = xy$, $\lim_{m\to\infty} x_m{}^{-1} = x^{-1}$ と同じである．

条件（6）において，特に $x = y = e$ とおくとつぎのことがわかる．単位元 e の任意の近傍 U に対して，$V^{-1}V \subset U$ をみたす e の近傍 V が存在する．実際，（6）の条件より $V_1{}^{-1}V_2 \subset U$ となる e の近傍 V_1, V_2 が存在するので，V として $V = V_1 \cap V_2$ をとると $V^{-1}V \subset U$ となる．

G, G' を2つの位相群とする．G と G' の間に（群として）同型な同相写像 $f: G \to G'$ が存在するとき，G と G' は**位相群として同型**であるといい，記号 $G \cong G'$ で表わす．位相群 G, G' が位相群として同型であるための必要十分条件は $gf = 1_G$, $fg = 1_{G'}$ をみたす2つの連続な準同型写像 $f: G \to G'$, $g: G' \to G$ が存在することである．

例[†] **96.** $S^0 = \{-1, 1\}$, $S^1 = \{x \in \boldsymbol{C} \mid |x| = 1\}$, $S^3 = \{x \in \boldsymbol{H} \mid |x| = 1\}$ はいずれも（積に関して）位相群である．

例 97. $\boldsymbol{R}$ は（和に関して）位相群であり，$\boldsymbol{R}^+ = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x > 0\}$ は（積に関して）位相群である．そして $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}^+$ は位相群として同型である：$\boldsymbol{R} \cong \boldsymbol{R}^+$．実際，$f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^+$, $f(x) = e^x$, $g: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$, $g(x) = \log x$ は $gf = 1_{\boldsymbol{R}}$, $fg = 1_{\boldsymbol{R}^+}$ をみたす連続な準同型写像である（例38）からである．

例 98. $\boldsymbol{R}$ を実数全体のつくる位相加群とする．このとき連続な準同型写像 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ はある $a \in \boldsymbol{R}$ を用いて，$f(x) = ax$ と表わされる（例37）ことを示そう．実際，f は準

† 球面 S^n $(n \neq 0, 1, 3)$ は位相群にならないことが知られている（**E. Cartan**）．

同型写像であるから，$f(x+y)=f(x)+f(y)$, $x, y\in \boldsymbol{R}$ をみたしている．この式より $f(1)=a$ とおくとき（m, n に関する帰納法を用いると）$f\left(\dfrac{n}{m}\right)=\dfrac{n}{m}a$（$m, n$ は整数）となることが容易に確かめられる．すなわち，任意の有理数 r に対して $f(r)=ar$ となることがわかる（以上の計算は代数的である）．さて，任意の $x\in \boldsymbol{R}$ は有理数 r_n を用いて $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ と表わされるので，f の連続性より $f(x)=f(\lim_{n\to\infty} r_n)=\lim_{n\to\infty} f(r_n)=\lim_{n\to\infty} ar_n = ax$ となる．この例は大そう興味深いことを暗示している．写像 f が準同型であるということは代数的（群論的）仮定であり，連続であるということは位相的仮定であるが，この 2 つの仮定から得られた関数 ax は x に関して微分可能となっている．このように代数的性質と位相的性質とから解析的性質が導かれたことは注目すべきことである．この例の内容は一般につぎのように拡張される：「G, G' を Lie 群とし，$f: G\to G'$ を連続な準同型写像とすると，f は微分可能である」．同じく代数的な性質と位相的性質とから解析的性質を導き出す問題につぎの有名なHilbertの第 5 の問題がある：「位相多様体である位相群 G は Lie 群であるか？」．この問題は A. M. Gleason, D. Montgomery, L. Zippin, H. Yamabe 等により 1952 年肯定的に解決された．

（2） 古典群が位相群であること

まず一般線形群 $GL(n, K)$ が位相群であることを示そう．$GL(n, K)$ において $\lim_{m\to\infty} A_m = A$, $\lim_{m\to\infty} B_m = B$ ならば $\lim_{m\to\infty} A_m B_m = AB$ となることはすでに証明した（例 76）．さらに $\lim_{m\to\infty} A_m = A$ ならば $\lim_{m\to\infty} {A_m}^{-1} = A^{-1}$ を証明しなければならない．$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ ならば正則行列 A の逆行列 A^{-1} は $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\left(A_{jt}\right)$（$A_{jt}$ は A の成分 a_{kl} の多項式）で表わされる．すなわち A^{-1} の各成分は A の成分 a_{kl} の連続関数である．これは A^{-1} が A の連続関数であることを示している．しかしこの証明は $K=\boldsymbol{H}$ のときには通用しない（28 頁）．$\boldsymbol{H}$ の場合も含めて証明するためにまずつぎの補題を示そう．

補題 68. 行列 $A\in M(n, K)$ が $\|E-A\|<1$ をみたすならば A は正則であり，かつその逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1}=E+\sum_{k=1}^{\infty}(E-A)^k$$

で与えられる．

証明 $\|E-A\|=r$ とおくと，仮定より $0\leqq r<1$ である．$B_m = E+\sum_{k=1}^{m}(E-A)^k$ とおくと $\|E\|+\sum_{k=1}^{m}\|(E-A)^k\| \leqq \|E\|+\sum_{k=1}^{m}\|E-A\|^k \leqq \|E\| + \sum_{k=1}^{\infty} r^k = \|E\|+$

$\frac{r}{1-r} < \infty$ となるから $B_1, B_2, \cdots, B_m, \cdots$ は絶対収束する．ゆえに $B_1, B_2, \cdots, B_m, \cdots$ はある行列 $B \in M(n, K)$ に収束する（補題34）: $\lim_{m\to\infty} B_m = B$. しかるに

$$AB_m = (E-(E-A))(E+(E-A)+\cdots+(E-A)^m) = E-(E-A)^{m+1}$$

であるから $\|AB_m - E\| = \|(E-A)^{m+1}\| \leqq \|E-A\|^{m+1} = r^{m+1} \to 0$ $(m\to\infty)$. よって $\lim_{m\to\infty} AB_m = E$, したがって $AB = A\lim_{m\to\infty} B_m = \lim_{m\to\infty} AB_m = E$ となる．これは $B = A^{-1}$ を示している．よって補題が証明された．

はじめにもどって，まず $\lim_{m\to\infty} A_m = E$ ならば $\lim_{m\to\infty} A_m^{-1} = E$ を示そう．与えられた $\varepsilon > 0$ に対して $0 < r < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ をみたす r をとる．この r に対して，$\lim_{m\to\infty} A_m = E$ であるから，自然数 M を $m > M$ ならば $\|A_m - E\| < r$ となるようにとる．このとき $A_m^{-1} = E + \sum_{k=1}^{\infty}(E-A_m)^k$ である（補題68）から $\|A_m^{-1} - E\| = \|\sum_{k=1}^{\infty}(E-A_m)^k\| \leqq \sum_{k=1}^{\infty}\|E-A_m\|^k < \sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{r}{1-r} < \varepsilon$ となる．これは $\lim_{m\to\infty} A_m^{-1} = E$ を示している．さて一般に $\lim_{m\to\infty} A_m = A$ とするとき，A^{-1} を左から掛けて $\lim_{m\to\infty} A^{-1}A_m = E$ である．いま証明したことより $\lim_{m\to\infty}(A^{-1}A_m)^{-1} = E$, すなわち $\lim_{m\to\infty} A_m^{-1}A = E$ となる．再び A^{-1} を右から掛けて，$\lim_{m\to\infty} A_m^{-1} = A^{-1}$ を得る．以上のことを定理にまとめておこう．

定理 5.　$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．一般線形群 $GL(n, K)$ は（行列の積に関して）位相群である．

H を位相群 G の（代数的な意味の）部分群とするとき，H に G の相対位相をいれると明らかに H は位相群になる．$SL(n, K)$, $G(n, K)$, $SG(n, K)$ は $GL(n, K)$ の部分群であるから，つぎの定理を得る．

定理 6.　$SL(n, \boldsymbol{R})$, $SL(n, \boldsymbol{C})$, $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$, $SU(n)$ は（行列の積に関して）位相群である．

位相群 G を位相空間としてみるとき，弧状連結，コンパクト等の位相の性質をもっているならば，G を弧状連結群，コンパクト群のように群の前に位相の性質をつけていうことにする．すると，定理3と定理6をあわせるとつぎの定理を得る．

定理 7.　$O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$, $SU(n)$ はコンパクト群である．

補題68よりつぎの定理が得られる．

定理 8.　$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．$GL(n, K)$ は $M(n, K)$ の開集合である．

証明　$A \in GL(n, K)$ とするとき，$\varepsilon = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ とおくと $U_\varepsilon(A) = \{B \in M(n, K) |$

$\|B-A\|<\varepsilon\}\subset GL(n,K)$ である. 実際, $B\in U_\varepsilon(A)$ とすると $\|B-A\|<\varepsilon=\dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$ であるから $\|A^{-1}B-E\|=\|A^{-1}(B-A)\|\leqq\|A^{-1}\|\|B-A\|<1$ となる. ゆえに $A^{-1}B$ は正則行列になる（補題 68）ので B も正則である. よって $B\in GL(n,K)$ である. $GL(n,K)$ の各点 A に対して $U_\varepsilon(A)\subset GL(n,K)$ となる ε が存在することは $GL(n,K)$ が $M(n,K)$ の開集合であることを示している.（$K=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}$ のときには, 連続写像 $\det: M(n,K)\to K$（例 74）を用いると, $GL(n,K)=\det^{-1}(K-\{0\})$ であるから, $GL(n,K)$ は K の開集合 $K-\{0\}$ の連続写像 det による逆像として $M(n,K)$ の開集合である, としてもよい).

定理 9. $K=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C},\boldsymbol{H}$ とする. $GL(n,K)$ は可算開基をもつ局所コンパクト Hausdorff 群である.

証明 $GL(n,K)$ が可算開基をもつことはすでに示した（例 94）. また $GL(n,K)$ は局所コンパクト Hausdorff 空間 $M(n,K)$（例 95）の開集合（定理 8）であるから局所コンパクト Hausdorff 空間である（補題 65 (2)).

定理 10. $K=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}$ とする. $SL(n,K)$ は $GL(n,K)$ の閉部分群である. したがって $SL(n,K)$ もまた可算開基をもつ局所コンパクト Hausdorff 群である.

証明 $SL(n,K)$ は $M(n,K)$ の閉集合である（これはすでに定理 3 の証明の中で示したが再記すると, 連続写像 $\det: M(n,K)\to K$ に対して $SL(n,K)=\det^{-1}(1)$ であるからである). だから $SL(n,K)$ は当然 $GL(n,K)$ の閉集合である. $SL(n,K)$ が可算開基をもつことはすでに示した（例 94). $SL(n,K)$ が局所コンパクトであることは局所コンパクト空間 $M(n,K)$ の閉集合であるからである（補題 65 (1)). $SL(n,K)$ が Hausdorff 空間であることは明らかである.

（3） 位相群のもつ 2, 3 の性質

位相群のもつ簡単な性質のうちで後で用いるものをいくつか述べておこう.

補題 69. G を位相群とする. 写像 $\nu, l_a, r_a: G\to G$ $(a\in G)$ をそれぞれ $\nu(x)=x^{-1}$, $l_a(x)=ax$, $r_a(x)=xa$ と定義するとき, ν, l_a, r_a はいずれも同相写像である.

証明 写像 ν は連続であり, かつ $\nu\nu=1_G$ であるから ν は同相写像である. 写像 l_a, $l_{a^{-1}}$ は連続であり, かつ $l_al_{a^{-1}}=1_G=l_{a^{-1}}l_a$ であるから l_a は同相写像である. r_a についても同様である.

この補題 69 によると, O を位相群 G の開集合（F を G の閉集合）とするとき, 任意の $a\in G$ に対し, O^{-1}, aO, Oa もまた G の開集合（F^{-1}, aF, Fa もまた G の閉集合）で

あることがわかる．したがって，O を点 $a\in G$ の近傍とするとき $a^{-1}O$, Oa^{-1} は単位元 e の近傍であり，逆に V を e の近傍とすると aV, Va は a の近傍となる．

補題 70.　位相群 G の任意の部分集合 A に対して，

$$\bar{A}=\bigcap_{e\in V}AV$$

がなりたつ．ここに $\bigcap_{e\in V}$ は単位元 e のすべての近傍 V をわたるものとする．同様に $\bar{A}=\bigcap_{e\in V}VA$ もなりたつ．

証明　$x\in\bar{A}$ とすると，e の任意の近傍 V に対して xV^{-1} は x の近傍であるから $xV^{-1}\cap A\neq\phi$ である（補題 42）．よって $x\in AV$ となり，$\bar{A}\subset AV$, すなわち $\bar{A}\subset\bigcap_{e\in V}AV$ が示された．逆に $x\notin\bar{A}$ とするとき，x のある近傍 U に対して $U\cap A=\phi$ となる（補題 42）．U に対して $xV^{-1}\subset U$ をみたす e の近傍 V が選べるので，この V に対しては $xV^{-1}\cap A=\phi$ となる．よって $x\notin AV$ となり $\bigcap_{e\in V}AV\subset\bar{A}$ が示された．よって $\bar{A}=\bigcap_{e\in V}AV$ である．

補題 71.　G を位相群とする．G の閉集合 F と G のコンパクト集合 C が

$$F\cap C=\phi$$

であるならば，単位元 e のある近傍 V をとって

$$FV\cap CV=\phi$$

とすることができる．同様に $VF\cap VC=\phi$ にもすることができる．

証明　e の近傍 U に対して $F(U)=\overline{FUU^{-1}}$ とおくと，$F(U)\subset FUU^{-1}U$ である（補題 70）．このとき，e の任意の近傍 W に対して $UU^{-1}U\subset W$ となる e の近傍 U が存在することに注意して補題 70 を用いると，$\bigcap_{e\in U}(F(U)\cap C)=\bigcap_{e\in U}F(U)\cap C\subset\bigcap_{e\in U}FUU^{-1}U\cap C\subset\bigcap_{e\in W}FW\cap C=\bar{F}\cap C=F\cap C=\phi$ となる．C がコンパクトであることから有限個の $U_1,\cdots,U_m$ が存在して

$$\bigcap_{i=1}^{m}(F(U_i)\cap C)=\phi$$

となる（命題 54 (1)）．さて $V=\bigcap_{i=1}^{m}U_i$ とおくと，

$$FVV^{-1}\cap C\subset F(V)\cap C\subset\bigcap_{i=1}^{m}F(U_i)\cap C=\bigcap_{i=1}^{m}(F(U_i)\cap C)=\phi$$

よって $FVV^{-1}\cap C=\phi$, すなわち $FV\cap CV=\phi$ となる．

補題 72.　G を位相群とする．G の閉集合 F と G のコンパクト集合 C に対して，

FC, CF はともに G の閉集合である.

証明　$x \notin FC$ とすると $F^{-1}x \cap C = \phi$ である. $F^{-1}x$ は閉集合で C はコンパクトであるから, $F^{-1}xV \cap CV = \phi$ となる単位元 e の近傍 V が存在する（補題71). よって $xV \cap FCV = \phi$ となる. 特に $xV \cap FC = \phi$ である. xV は x の近傍であるから, これより $x \notin \overline{FC}$ がわかる（補題42). よって $\overline{FC} \subset FC$ が証明されたが, これは FC が閉集合であることを示している. CF に対しても同様である.

つぎの命題は位相群 G の基本群および被覆群（第4章）に関係する命題である.

命題73.　(Schreier) 弧状連結群 G の任意の離散正規部分群 N は G の中心 $C(G)$ に含まれる : $N \subset C(G)$. すなわち N の任意の元 a は G のすべての元と可換である : $xa = ax$, $x \in G$.

証明　$a \in N$ をとり固定しておく. 写像 $f: G \to N$ を $f(x) = xax^{-1}$ と定義する（N は正規部分群であるから $xax^{-1} \in N$ である). f は連続写像であり, かつ G が弧状連結であるから, $f(G)$ も弧状連結である（命題59). しかるに N は離散であるから $f(G)$ は1点のみからなりたっている（例91). $f(G)$ は a を含むから $f(G) = a$ である. すなわち任意の $x \in G$ に対して $xax^{-1} = a$, $xa = ax$ となる.

（4） 開写像定理

命題74.　**(開写像定理)** G を可算開基をもつ局所コンパクト Hausdorff 群とし, G' を局所コンパクト Hausdorff 群とする. このとき連続な全射準同型写像 $f: G \to G'$ は開写像である.

証明　まず U を単位元 e を含む G の開集合とするとき, $f(U)$ は G' の空でない開集合を含むことを示そう. 実際, G が局所コンパクト Hausdorff 空間であるから, U に対して $\overline{V} \subset U$ かつ $\overline{V}$ がコンパクトであるような e の近傍 V が存在する（補題64). この V を用いて G の開被覆 $G = \bigcup_{x \in G} xV$ をつくるとき, G は可算開基をもつので可算個の点 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$ を選んで $G = \bigcup_{m=1}^{\infty} x_m V$ とすることができる（補題61). $f(x_m\overline{V}) = F_m'$ とおくと $x_m\overline{V}$ はコンパクトであるから F_m' もコンパクトである（命題49). ゆえに G' が Hausdorff 空間であることから F_m' は G' の閉集合である（補題48 (2)). そして f の全射より

$$G' = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m'$$

となる. したがって Baire の定理（命題67）より, ある F_k' は G' の空でない開集合 W'

を含んでいる．このとき

$$f(x_k^{-1})W' \subset f(x_k^{-1})F_k' = f(x_k^{-1})f(x_k\bar{V}) = f(x_k^{-1}x_k\bar{V}) = f(\bar{V}) \subset f(U)$$

となり $f(U)$ は空でない開集合 $f(x_k^{-1})W'$ を含んでいる．さて O を G の開集合 ($O \neq \phi$ としておこう) とし，$f(O)$ が G' の開集合であることを示そう．点 $x' \in f(O)$ に対して $x' = f(x)$ となる点 $x \in O$ をとる．$x^{-1}O$ は e の近傍であるから $U^{-1}U \subset x^{-1}O$ となる e の近傍 U がとれる．上に述べたことより $f(U)$ はG' の空でないある開集合 U' を含んでいる：$U' \subset f(U)$．U' は空でないから点 $y' \in U'$ をとり，$y' = f(y)$, $y \in U$ であるとすると (e' は G' の単位元とする)

$$\begin{aligned} e' \in y'^{-1}U' \subset f(y)^{-1}f(U) = f(y^{-1}U) \subset f(U^{-1}U) \subset f(x^{-1}O) \\ = f(x)^{-1}f(O) = x'^{-1}f(O) \end{aligned}$$

より $x' \in x'y'^{-1}U' \subset f(O)$ となる．すなわち $f(O)$ の各点 x' に対して，$f(O)$ に含まれる x' の近傍 $x'y'^{-1}U'$ がとれた．これは $f(O)$ が G' の開集合であることを示している．よって定理が証明された．

§4. 等化空間と等質空間

この節では等化空間の定義を述べ，その重要な例である等質空間と X の部分集合 A を1点に縮めた空間 X/A について説明しよう．その1つの応用として射影空間の位相を調べる．

(I) 等化空間

位相空間 X に同値法則をみたす関係 $\sim$ が与えられているとする．射影 $p: X \to X/\sim$, $p(x) = [x]$ が全射であることを用いて等化集合 $X/\sim$ に位相を導入しよう．$X/\sim$ の部分集合 O に対して，

$p^{-1}(O)$ が X の開集合であるとき O は $X/\sim$ の開集合である

と定義すると，$X/\sim$ の開集合の全体の族 $\mathcal{O}$ は $X/\sim$ に位相を与える．実際，$\mathcal{O}$ が位相空間の定義の3つの条件をみたしていることを確かめよう．まず $p^{-1}(\phi) = \phi$, $p^{-1}(X/\sim) = X$ であるから ϕ, $X/\sim$ は開集合である．つぎに O_1, O_2 を $X/\sim$ の開集合とすると，$p^{-1}(O_1)$, $p^{-1}(O_2)$ は X の開集合であるが，$p^{-1}(O_1 \cap O_2) = p^{-1}(O_1) \cap p^{-1}(O_2)$ より $p^{-1}(O_1 \cap O_2)$ は X の開集合である．したがって $O_1 \cap O_2$ は $X/\sim$ の開集合である．同様に O_λ, $\lambda \in \Lambda$ を $X/\sim$ の開集合とするとき，$p^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} p^{-1}(O_\lambda)$ を用いると $\bigcup_{\lambda \in \Lambda}$

O_λ が $X/\sim$ の開集合であることがわかる．このようにして得られた位相空間 $X/\sim$ を関係 $\sim$ による X の **等化空間** といい，この位相を **等化位相** という．以下 $X/\sim$ とかくときにはつねにこの等化位相を用いることにする．射影 $p: X \to X/\sim$ は位相のいれ方より明らかに連続（な全射）である．したがってつぎの命題がなりたつ（命題 49, 59）．

命題 75. $X/\sim$ を位相空間 X の同値関係 $\sim$ による等化空間とする．このときつぎの (1), (2) がなりたつ．

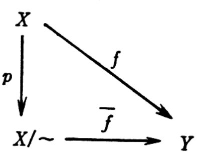
（1） X がコンパクトならば，$X/\sim$ もコンパクトである．

（2） X が弧状連結ならば，$X/\sim$ も弧状連結である．

つぎの補題は写像 $\bar{f}: X/\sim \to Y$ が連続であることを証明するために基本的である．

補題 76. 位相空間 X に同値関係 $\sim$ が与えられているとし，$p: X \to X/\sim$ をその射影とする．Y を位相空間とし，2つの写像 $f: X \to Y$, $\bar{f}: X/\sim \to Y$ が

$$f = \bar{f}p$$



をみたしているならば

$$f \text{ が連続} \iff \bar{f} \text{ が連続}$$

がなりたつ．

証明 f が連続であるとする．$\bar{f}$ が連続であることを示すためには，O を Y の任意の開集合とするとき，$\bar{f}^{-1}(O)$ が $X/\sim$ の開集合であることを示せばよい．それは等化位相の定義より $p^{-1}(\bar{f}^{-1}(O))$ が X の開集合であることを示すことである．しかるに $f = \bar{f}p$ より $p^{-1}(\bar{f}^{-1}(O)) = f^{-1}(O)$ となるが，f が連続であることから $f^{-1}(O)$，すなわち $p^{-1}(\bar{f}^{-1}(O))$ が X の開集合であることがわかる．よって $\bar{f}$ の連続であることが証明された．逆に $\bar{f}$ が連続であれば p が連続であるから，合成写像 $f = p\bar{f}$ は連続である（補題 38 (2)）．

（2） 等質空間

定義 G を位相群とし，H をその部分群とする．G の H による等質集合 G/H に等化位相を与えた位相空間を同じ記号 G/H で表わし，G の H による **等質空間** という．

命題 77. G を位相群とし，H を G の部分群とする．このとき射影

$$p: G \longrightarrow G/H, \qquad p(x) = xH$$

は（連続な全射）開写像である．

証明 O を G の開集合とする．$p(O)$ が G/H の開集合であることを示すためには，等化位相の定義から $p^{-1}(p(O))$ が G の開集合であることを示すとよい．しかるに $p^{-1}(p$

$(O)) = OH = \bigcup_{h \in H} Oh$ であり，Oh は開集合であるからその和集合 $\bigcup_{h \in H} Oh$ も開集合である．よって p の開写像であることが証明された．

命題 78. G を位相群とし，H を G の閉部分群とするならば，G/H は Hausdorff 空間である．

証明 $[x]$, $[y]$ を G/H の相異なる2点とする．このとき $x \notin yH$, すなわち $x \cap yH = \phi$ である．1点 x はコンパクトであり，yH は閉集合であるから，単位元 e の近傍 V をとって $Vx \cap VyH = \phi$ とすることができる（補題 71）．$H = HH^{-1}$ であるからさらに $VxH \cap VyH = \phi$ がわかる．射影 $p : G \to G/H$ は開写像（命題 77）であるから，$p(Vx)$, $p(Vy)$ はそれぞれ $[x]$, $[y]$ の近傍であり，また $VxH \cap VyH = \phi$ は $p(Vx) \cap p(Vy) = \phi$ を示している．よって G/H は Hausdorff 空間である．

(3) 準同型定理

群における準同型定理（命題 7）を位相群の場合に拡張しよう．つぎの命題 79, 80, 81 はいずれも位相群における**準同型定理**と名づけるべきものである．

命題 79. G をコンパクト群，G' を Hausdorff 群とし，$f : G \to G'$ を連続な全射準同型写像とする．このとき f の核 N は G の閉正規部分群であり，写像 $\bar{f} : G/N \to G'$ を $\bar{f}(xN) = f(x)$ と定義すると $\bar{f}$ は位相群の同型写像となる．したがって G/N と G' は位相群として同型である：

$$G/N \cong G'$$

証明 写像 $\bar{f} : G/N \to G'$ は（代数的に）群の同型写像であった（命題 7）．f が連続であるから $\bar{f}$ は連続写像である（補題 76）．しかるに G はコンパクトであるから G/N もコンパクトであり（命題 75 (1)），かつ G' が Hausdorff 空間であるから $\bar{f}$ は同相写像である（命題 50）．よって $\bar{f}$ は位相群の同型写像である．

定理 11. $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とする．写像 $\det : G(n, K) \to S_K{}^0$ はつぎの位相群としての同型を誘導する．

$$O(n)/SO(n) \cong S^0, \qquad U(n)/SU(n) \cong S^1$$

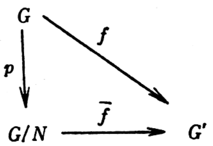
証明 写像 $\det : G(n, K) \to S_K{}^0$ は連続な（例 74）全射準同型写像でありその核は $SG(n, K)$ であった（定理 1）．しかるに $G(n, K)$ はコンパクト群であり（定理 7）$S_K{}^0$ は Hausdorff 群であるから，命題 79 より位相群としての同型 $G(n, K)/SG(n, K) \cong S_K{}^0$ を得る．

G がコンパクト群でなくてもつぎの命題がなりたつ．

命題 80. G, G' を位相群とし，$f : G \to G'$ を連続な全射準同型開写像とする．このとき f の核を N とし，写像 $\bar{f} : G/N \to G'$ を $\bar{f}(xN) = f(x)$ と定義すると，$\bar{f}$ は位相群の同型写像となる．したがって G/N と G' は位相群として同型である：

$$G/N \cong G'$$

証明 写像 $\bar{f} : G/N \to G'$ が連続な（代数的に）群の同型写像であることは命題 79 の前半と全く同じである．$\bar{f}$ が同相写像であることをいうためには $\bar{f}$ が開写像であることを示すとよい（補題 40）．さて O を G/N の開集合とするとき，$\bar{f}(O) = f(p^{-1}(O))$（$p$ は射影）において，p が連続であるから $p^{-1}(O)$ は G の開集合であり，さらに f が開写像であるから $f(p^{-1}(O))$ は G' の開集合である．よって $\bar{f}$ が開写像であることがわかり命題が証明された．



写像 $f : G \to G'$ が開写像であるかどうかを調べることは一般には容易なことではない．しかし群 G, G' に条件をつけて開写像定理（命題 74）を用いると，命題 80 よりつぎの命題を得る．

命題 81. G を可算開基をもつ局所コンパクト Hausdorff 群，G' を局所コンパクト Hausdorff 群とし，$f : G \to G'$ を連続な全射準同型写像とする．このとき f の核 N は G の閉正規部分群であり，写像 $\bar{f} : G/N \to G'$ を $\bar{f}(xN) = f(x)$ と定義すると $\bar{f}$ は位相群の同型写像となる．したがって G/N と G' は位相群として同型である：

$$G/N \cong G'$$

例 99. $\boldsymbol{R}$ は可算開基をもつ（例 94）局所コンパクト（例 95）Hausdorff 群であり，S^1 は（局所）コンパクト（定理 2）Hausdorff 群である．したがって連続な全射準同型写像 $f : \boldsymbol{R} \to S^1$, $f(x) = e^{2\pi i x}$ は位相群としての同型 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \cong S^1$ を誘導する（命題 81）．

例 100. 実数全体のつくる加群 $\boldsymbol{R}$ に離散位相を導入した位相群を $\boldsymbol{R}'$ とし，$\boldsymbol{R}$ を普通の位相をもつ位相群とする．このとき $\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}$ はともに局所コンパクト Hausdorff 群であり写像 $f : \boldsymbol{R}' \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x$ は連続な（群の）同型写像であるが，f は位相群の同型写像ではない（例 86）．この例においては準同型定理がなりたたないが，それは $\boldsymbol{R}'$ が可算開基をもたないからである（命題 81 参照）．

定理 12. $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とする．写像 $\det : GL(n, K) \to K^*$ はつぎの位相群としての同型を誘導する：

$$GL(n, \boldsymbol{R})/SL(n, \boldsymbol{R}) \cong \boldsymbol{R}^*, \qquad GL(n, \boldsymbol{C})/SL(n, \boldsymbol{C}) \cong \boldsymbol{C}^*$$

証明 $GL(n, K)$, $K^* = GL(1, K)$ は可算開基をもつ局所コンパクト Hausdorff 群である（定理 9）から，連続な全射準同型写像 $\det : GL(n, K) \to K^*$ に対して命題 81 を用いると，位相群の同型 $GL(n, K)/SL(n, K) \cong K^*$ を得る（定理 1）．

（4） コンパクト部分群

G がコンパクト群であればその等質空間 G/H もまたコンパクトである（命題 75 (1)）が，H がコンパクト部分群であるときにはこの逆もなりたつことを示そう．そのためにつぎの補題からはじめる．

補題 82. G を位相群とし，H を G のコンパクト部分群とする．このとき射影 $p : G \to G/H$ は閉写像である．

証明 一般に F を G の部分集合とするとき

$$p(F) = p(G) - p(G - FH)$$

がなりたつ．さて F を G の閉集合とするとき，H がコンパクトであるから FH は G の閉集合である（補題 72）．ゆえに $G - FH$ は G の開集合となり，射影 p が開写像である（命題 77）ことより $p(G - FH)$ は G/H の開集合となる．よって上式より $p(F)$ は G/H の閉集合であることがわかる．したがって p は閉写像である．

命題 83. G を位相群とし，H を G のコンパクト部分群とする．このとき等質空間 G/H がコンパクトならば，G もまたコンパクト（群）である．

証明 $p : G \to G/H$ を射影とする．背理法によって証明しよう．

G がコンパクトでないとすると，有限交叉性をもつ G のある閉集合族 F_λ, $\lambda \in \Lambda$ が存在して $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \phi$ となる（命題 54 (1)）．F_λ, $\lambda \in \Lambda$ は有限交叉性をもつから，任意の $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \Lambda$ に対して $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i} \neq \phi$ であるが，集合族 F_λ, $\lambda \in \Lambda$ は初めからこのような $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i}$ をすべて含んでいるとしておいてもよい（有限交叉性も変らない）．$F_\lambda' = p(F_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ とおくと，F_λ' は G/H の閉集合であり（補題 82），かつ F_λ, $\lambda \in \Lambda$ が有限交叉性をもつから，F_λ', $\lambda \in \Lambda$ もまた有限交叉性をもつ．したがって G/H がコンパクトであるという仮定より，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda' \neq \phi$ となる（命題 54 (1)）．

ゆえに $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda'$ より 1 点 x' をとり，また $p(x) = x'$ となる点 $x \in G$ をとる．このとき各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $x' \in F_\lambda'$ であるから

$$F_\lambda \cap xH \neq \phi \qquad \text{(i)}$$

が任意の $\lambda \in \Lambda$ に対してなりたつ．集合族 F_λ, $\lambda \in \Lambda$ が有限交叉性をもつから，（i）の

形の集合全体 $F_\lambda \cap xH$, $\lambda \in \Lambda$ も有限交叉性をもつ．すなわち任意の有限個 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \Lambda$ に対して

$$\bigcap_{i=1}^{m} F_{\lambda_i} \cap xH \neq \phi$$

となる．実際，$\bigcap_{i=1}^{m} F_{\lambda_i}$ もある F_λ $(\lambda \in \Lambda)$ に等しいとしておいたからである．さて xH はコンパクトであるから

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{F_\lambda \cap xH} \cap xH \neq \phi$$

がなりたつ（命題 54 (2)）．このとき

$$\phi \neq \bigcap_{\lambda} \overline{F_\lambda \cap xH} \cap xH \subset \bigcap_{\lambda} \bar{F}_\lambda \cap xH$$
$$= \bigcap_{\lambda} F_\lambda \cap xH = \phi \cap xH = \phi$$

となり矛盾する．よって G がコンパクトであることが証明された．

(5) 部分空間を1点に縮めた空間

定義　X を位相空間とし，A を X の部分集合とする．X において

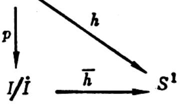
$$x \sim y \iff x = y \quad \text{または} \quad x, y \in A$$

と定義すると関係 $\sim$ は同値法則をみたす．この関係 $\sim$ による X の等化空間 $X/\sim$ を X/A で表わし，X において **A を1点に縮めた空間**という．

位相幾何学では X/A を単に X/A で表わすのが普通である．G を位相群とし，H をその部分群とするとき，H は当然 G の部分集合であるから記号 G/H は等質空間を意味するのか，G において H を1点に縮めた空間を意味するのか区別がつかない．しかし前後の関係から結構混乱は起らないようであるが本書では記号を少しかえておいた．等質空間 G/H はたしかに G において H を1点に縮めた空間ではないが，ある意味で似かよった一面があることを例 103 の $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \simeq S^1$ や第3章の $G(n, K)$ の単体構造と $G(n, K)/G(n-1, K) \simeq S^{dn-1}$ の関係等が示している．

例 101.　I を閉区間 $[0, 1]$ とし，$\dot{I} = \{0, 1\}$ とする．I において $\dot{I}$ を1点に縮めた空間 $I/\dot{I}$ は単位円 S^1 と同相である：

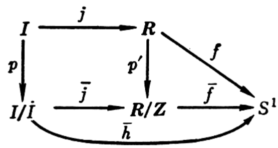
$$I/\dot{I} \simeq S^1$$



実際，$p : I \to I/\dot{I}$ を射影とする．写像 $h : I \to S^1$, $h(x) = e^{2\pi i x}$ は連続であり，かつ $h(0) = h(1)$ であるから，h は $h = \bar{h}p$ をみたす連続写像 $\bar{h} : I/\dot{I} \to S^1$ を誘導する（補題 76）．

明らかに $\bar{h}$ は全単射である（補題2）. I はコンパクトであるから $I/\dot{I}$ もコンパクトであり（補題75(1)），S^1 は Hausdorff 空間であるから $\bar{h}$ は同相写像である（命題50）．したがって $I/\dot{I}$ と S^1 は同相である．

例 102. 写像 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{S}^1$, $f(x) = e^{2\pi i x}$ に対して準同型定理（命題81）を用いると，f は位相群の同型写像 $\bar{f}: \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \to S^1$ を誘導することを例99で示した．その証明には開写像定理（命題74）が本質的であった．ここでは開写像定理を用いずに $\bar{f}$ が位相群の同型写像であることの別証明を与えよう．f が連続な群の同型写像 $\bar{f}: \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \to S^1$ を誘導することは容易な事実で，問題は $\bar{f}$ の開写像を示すことにある．右図において p, p' をそれぞれ射影とし，j を包含写像とするとき，j は明らかに，$\bar{j}p = p'j$ をみたす連続写像 $\bar{j}: I/\dot{I} \to \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ を誘導する（補題76）．このとき $\bar{f}\bar{j}$ は例101の同相写像 $\bar{h}$ にほかならない．このことから $\bar{f}$ が開写像であることがわかる．実際，O を $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ の開集合とするとき $\bar{f}(O) = \bar{h}(\bar{j}^{-1}(O))$ であるから，$\bar{j}$ の連続より $\bar{j}^{-1}(O)$ は $I/\dot{I}$ の開集合であり，$\bar{h}$ の同相写像であることより $\bar{h}(\bar{j}^{-1}(O))$ が S^1 の開集合となるからである．以上で $\bar{f}$ が位相群の同型写像であることが証明された．



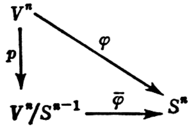
例 103. $\boldsymbol{R} = (-\infty, \infty)$ において，部分集合 $A = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ を1点に縮めた空間 $\boldsymbol{R}/A$ は単位円 S^1 と同相であることが例101と同様にすると証明される．これについては再び3章（148頁）で述べよう．

例 104. $V^n = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq 1\}$ において，$S^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in V^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ を1点に縮めた空間 V^n/S^{n-1} は球面 $S^n = \{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \|\boldsymbol{a}\| = 1\}$ に同相である：

$$V^n/S^{n-1} \simeq S^n$$

実際，$p: V^n \to V^n/S^{n-1}$ を射影とし，かつ写像 $\varphi: V^n \to S^n$ を

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = (-2\boldsymbol{x}\sqrt{1-\|\boldsymbol{x}\|^2},\ 2\|\boldsymbol{x}\|^2 - 1)$$



と定義する．$\varphi(\boldsymbol{x}) \in S^n$ であることは

$\|\varphi(\boldsymbol{x})\|^2 = \|-2\boldsymbol{x}\sqrt{1-\|\boldsymbol{x}\|^2}\|^2 + (2\|\boldsymbol{x}\|^2 - 1)^2 = 4\|\boldsymbol{x}\|^2(1-\|\boldsymbol{x}\|^2) + 4\|\boldsymbol{x}\|^4 - 4\|\boldsymbol{x}\|^2 + 1 = 1$ となるからである．$\varphi(S^{n-1}) = (0, \cdots, 0, 1) = \boldsymbol{e}_{n+1}$ であるから φ は $\varphi = \bar{\varphi}p$ をみたす写像 $\bar{\varphi}: V^n/S^{n-1} \to S^n$ を誘導する．明らかに φ は連続写像であるから $\bar{\varphi}$ も連続である（補題76）．φ は全射である．実際，$\boldsymbol{a} \in S^n$ が $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_{n+1}$ のときは $\varphi(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{e}_{n+1}$ であり，$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{e}_{n+1}$ のとき

は $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}, b)$ $(\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^n, b\in\boldsymbol{R}, \|\boldsymbol{b}\|^2+b^2=1)$ で表わして $\boldsymbol{x}_0=-\dfrac{\boldsymbol{b}}{\sqrt{2(1-b)}}$ とおくと，$\|\boldsymbol{x}_0\|\leqq 1$ であり，かつ $\varphi(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{a}$ となる．φ の全射より $\bar{\varphi}$ も全射である（補題2(1)）．また $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{e}_{n+1}$ のときは $\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}$ となるのは上記の $\boldsymbol{x}_0$ に限るので $\bar{\varphi}$ は単射である（補題2(2)）．さて V^n がコンパクトである（例79）から V^n/S^{n-1} もコンパクトであり（補題75(1)），かつ S^n は Hausdorff 空間であるから $\bar{\varphi}$ は同相写像である（命題50）．

(6) 射影空間の位相

つぎの定理は射影空間のいま1つの定義を与えている．

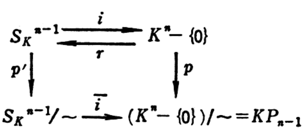
定理 13. $K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．単位球面 $S_K{}^{n-1}$ において，

$$\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}a \text{ となる } a\in K\ (|a|=1) \text{ が存在する}$$

と定義すると関係 $\sim$ は同値法則をみたす．この関係による $S_K{}^{n-1}$ の等化空間 $S_K{}^{n-1}/\sim$ は射影空間 KP_{n-1} と同相である．

$$S^{n-1}/\sim\ \simeq \boldsymbol{R}P_{n-1},\qquad S^{2n-1}/\sim\ \simeq \boldsymbol{C}P_{n-1},\qquad S^{4n-1}/\sim\ \simeq \boldsymbol{H}P_{n-1}$$

証明　下図において p, p' をそれぞれ射影とし，i は包含写像とする．写像 i は $pi=\bar{i}p'$ をみたす写像 $\bar{i}: S_K{}^{n-1}/\sim\ \to KP_{n-1}$ を誘導するがこの $\bar{i}$ が単射であることは明らかである．また pi が連続であることから $\bar{i}$ は連続である（補題76）．$\bar{i}$ が同相写像であることをいうには $\bar{i}$ が全射でかつ開写像であることを示せばよい．



そのために写像 $r: K^n-\{0\}\to S_K{}^{n-1}$ を $r(\boldsymbol{x})=\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ と定義する．r は連続写像であって $\bar{i}p'r=p$ をみたしている．$\bar{i}p'r=p$ は $\bar{i}$ が全射開写像であることを含んでいる．実際，p が全射であるから $\bar{i}$ も全射である．O を $S_K{}^{n-1}/\sim$ の開集合とするとき，$p^{-1}\bar{i}(O)=(\bar{i}p'r)^{-1}\bar{i}(O)=r^{-1}p'^{-1}\bar{i}^{-1}\bar{i}(O)=r^{-1}p'^{-1}(O)$ は，p', r が連続であるから $K^n-\{0\}$ の開集合である．$p^{-1}\bar{i}(O)$ が $K^n-\{0\}$ の開集合であることは等化位相の定義から，$\bar{i}(O)$ が KP_{n-1} の開集合であることを示している．以上で $\bar{i}: S_K{}^{n-1}/\sim\ \to KP_{n-1}$ が同相写像であることが証明された．

$S_K{}^{n-1}$ は弧状連結なコンパクト空間である（定理4, 2）から $S_K{}^{n-1}/\sim$ も弧状連結なコンパクト空間である（補題75）．したがって $S_K{}^{n-1}/\sim$ に同相である射影空間 KP_{n-1} も弧状連結なコンパクト空間である．

つぎに2つの射影空間 KP_{n-1} と $KP(n-1)$ が同相であることを示そう．写像 $f: K^n-\{0\}\to KP(n-1)$, $f(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\big(x_i\bar{x}_j\big)_{i,j=1,\cdots,n}$ は全単射 $\bar{f}: KP_{n-1}\to KP(n-$

1) を誘導した (59頁) が，f が連続写像であるから $\bar{f}$ は連続である (補題76). しかるに KP_{n-1} はコンパクトであり，$KP(n-1)$ は Hausdorff 空間であるから $\bar{f}$ は同相写像である (命題50). したがって KP_{n-1} と $KP(n-1)$ は同相である. 以上のことをまとめるとつぎの定理を得る.

定理[†] 14. $K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする. 射影空間 $KP_{n-1}\simeq KP(n-1)$ は弧状連結なコンパクト Hausdorff 空間である.

注意 KP_{n-1} が Hausdorff 空間であることの証明を $KP(n-1)$ の Hausdorff 性から導いた. KP_{n-1} が Hausdorff 空間であることの別証明が 110 頁にある. また $KP(n-1)$ の弧状連結，コンパクト性を KP_{n-1} のそれから導いた. しいて KP_{n-1} と無関係に証明しようとするには，まず，$U(n)$, $Sp(n)$ が弧状連結 (定理 20 (1)) コンパクトであること (定理 3) を知ってから定理 16 を用いると $\boldsymbol{C}P(n-1)$, $\boldsymbol{H}P(n-1)$ の弧状連結コンパクト性がわかる. ($\boldsymbol{R}P(n-1)$ についても少し細工するとわかる). また $KP(n-1)$ は閉胞体 (第3章参照，閉胞体は弧状連結コンパクト空間である) の連続像となっている (定理31) ので $KP(n-1)$ は弧状連結コンパクトであるとしてもよい.

§5. 位相変換群

等質空間 G/H を一般にした G-空間を定義し，その G-空間が等質空間になるための条件 (推移的) について述べよう. 球面および射影空間が古典群の等質空間で表わされることは重要な事実である.

(1) 位相変換群

定義 G を位相群とし，X を位相空間とする. 連続な写像 $\mu: G\times X\to X$ が与えられていて

(1) $\mu(g_1, \mu(g_2, x)) = \mu(g_1g_2, x)$ $\qquad g_1, g_2\in G, x\in X$

(2) $\mu(e, x) = x$ $\qquad e$ は G の単位元

をみたすとき，G を X の**左位相変換群** (または G が X に**左から働く**，または X は **G-空間**) という. $\mu(g, x)$ を gx で表わすことにすると，条件 (1) (2) は $g_2(g_1x) = (g_2g_1)x$, $ex = x$ にかきかえられる. $g(g^{-1}x) = x = g^{-1}(gx)$ であるから，写像 $\tilde{g}: X\to X$, $\tilde{g}(x) = gx$ は同相写像であることに注意しておこう.

---

† $\mathfrak{C}P(2)$ も弧状連結なコンパクト Hausdorff 空間であるが証明は定理 13 のようにすることはできない.

同様に，位相空間 X と位相群 G に対して連続写像 $\mu' : X \times G \to X$ が与えられていて

(1′)　$\mu'(\mu'(x, g_1), g_2) = \mu'(x, g_1 g_2)$

(2′)　$\mu'(x, e) = x$

をみたすとき G を X の**右位相変換群**（または G が X に**右から働く**）という．以下しばらく G は X に左から働くものとしておく．

位相空間 X の位相変換群 G がつぎの条件

すべての $x \in X$ に対して，$gx = x$ ならば $g = e$

をみたすとき，G は X に**効果的に**働くという．G が X に効果的に働いているとき，$gx = g'x$ がすべての $x \in X$ に対してなりたつならば $g = g'$ であることは明らかであろう．また G が条件

ある $x \in X$ に対して，$gx = x$ ならば $g = e$

をみたすならば，すなわち $g \in G$ が $g \neq e$ ならば任意の $x \in X$ に対して $gx \neq x$，となっているとき，G は X に**自由に**（または**不動点**[†]**なしに**）働くという．位相群 G が X に自由に働くならば当然 G は X に効果的に働いている．

例 105.　G を位相群とし，H を G の部分群とする．写像 $\mu : H \times G \to G$, $\mu(h, x) = hx$ により，H は G に自由に（したがって効果的に）働いている．特に G は自分自身に自由に働く位相変換群である．

例 106.　写像 $\mu : G(n, K) \times S_K^{n-1} \to S_K^{n-1}$, $\mu(A, \boldsymbol{a}) = A\boldsymbol{a}$ により古典群 $G(n, K)$ は単位球面 S_K^{n-1} に効果的に働いている．実際，μ が定義されることは，$A \in G(n, K)$, $\boldsymbol{a} \in S_K^{n-1}$ ならば，$\|A\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a}\|$（補題 16）$= 1$ より $A\boldsymbol{a} \in S_K^{n-1}$ となるからである．$A(B\boldsymbol{a}) = (AB)\boldsymbol{a}$, $E\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ は明らかであり，働き方が効果的であることは，任意の $\boldsymbol{a} \in S_K^{n-1}$ に対して $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ がなりたつならば任意の $\boldsymbol{x} \in K^n$ に対して $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ となるので $A = E$ となるからである．

例 107.　写像 $\mu : S^0 \times S^n \to S^n$, $\mu(1, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, $\mu(-1, \boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$ により，群 $S^0 = \{-1, 1\}$ は単位球面 S^n に自由に働いている．

G を位相空間 X の位相変換群とする．X の任意の 2 点 x, y に対して $gx = y$ をみたす元 $g \in G$ が存在するとき，G は X に**推移的に**働くという．この条件は 1 点 $x_0 \in X$ を固定しておいて，任意の点 $x \in X$ に対して $gx_0 = x$ となる元 $g \in G$ が存在するとして

[†] 写像 $f : X \to X$ に対して，点 $x \in X$ が $f(x) = x$ をみたすとき，x を f の**不動点**という．

も同じである．実際，X の 2 点 x, y に対して $g_1x_0 = x$, $g_2x_0 = y$ をみたす $g_1, g_2 \in G$ をとると，$g_2g_1^{-1}x = y$ となるからである．X の 1 点 x_0 を不動にする G の元全体の集合

$$G_{x_0} = \{g \in G \mid gx_0 = x_0\}$$

を G の x_0 における**等方群**（または**固定化群**）という．等方群 G_{x_0} が G の部分群であることは明らかであるが，X が Hausdorff 空間であるならば G_{x_0} は G の閉部分群である．実際，写像 $p: G \to X$, $p(g) = gx_0$ は連続であり，$G_{x_0} = p^{-1}(x_0)$ は閉集合 x_0（補題 36）の連続写像 p による逆像であるから，G_{x_0} は G の閉集合である．

例 108.　写像 $\mu: \boldsymbol{R} \times S^1 \to S^1$, $\mu(x, a) = e^{2\pi i x}a$ により位相群 $\boldsymbol{R}$ は S^1 に推移的に働いている．S^1 の 1 点 1 における $\boldsymbol{R}$ の等方群は $\boldsymbol{Z}$ である．

例 109.　G を位相群とし，H を G の部分群とする．このとき写像 $\mu: G \times G/H \to G/H$, $\mu(g, xH) = gxH$ により G は G/H に推移的に働いている．G/H の元 H における G の等方群は H である．

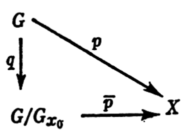
（2） 球面および射影空間と等質空間

つぎの命題 84, 85 はある条件のもとでは例 109 の逆がなりたつことを示している．また命題 84, 85 において，X を位相群 G', x_0 をその単位元 e' とおくと準同型定理（命題 79, 81）になっている．

命題 84.　コンパクト群 G が Hausdorff 空間 X に推移的に働いているとする．G の 1 点 $x_0 \in X$ における等方群を G_{x_0} とし，写像 $\bar{p}: G/G_{x_0} \to X$ を $\bar{p}(gG_{x_0}) = gx_0$ と定義すると，$\bar{p}$ は同相写像である．したがって G/G_{x_0} と X は位相空間として同型である：

$$G/G_{x_0} \simeq X$$

（この命題の内容を，写像 $p: G \to X$, $p(g) = gx_0$ は同相写像 $\bar{p}: G/G_{x_0} \to X$ を誘導するということにする）．



証明　写像 $p: G \to X$ を $p(g) = gx_0$ と定義する．G が X に推移的に働くことより p は全射であることがわかる．実際，$x \in X$ に対して，$gx_0 = x$ をみたす $g \in G$ をとると $p(g) = gx_0 = x$ である．また写像 p は条件

$$g \sim g' \iff p(g) = p(g')$$

をみたしている．実際，$g \sim g'$，すなわち $g'^{-1}g \in G_{x_0}$ とすると $g'^{-1}gx_0 = x_0$ より $gx_0 = g'x_0$，すなわち $p(g) = p(g')$ となる．逆は今の計算を逆にたどるとよい．ゆえに p は $p = \bar{p}q$（q は $q(g) = gG_{x_0}$）をみたす全単射 $\bar{p}: G/G_{x_0} \to X$, $\bar{p}(gG_{x_0}) = gx_0$ を誘導する

(補題2). p は連続であるから $\bar{p}$ も連続である (補題76). さて G がコンパクトであるから G/G_{x_0} はコンパクトであり (命題75 (1)), かつ X は Hausdorff 空間であるから, $\bar{p}$ は同相写像である (命題50).

G がコンパクト群でなくてもつぎの命題がなりたつ.

命題85. 可算開基をもつ局所コンパクト Hausdorff 群 G が局所コンパクト Hausdorff 空間 X に推移的に働いているとする. このとき G の1点 $x_0 \in X$ における等方群を G_{x_0} とし, 写像 $\bar{p}: G/G_{x_0} \to X$ を $\bar{p}(gG_{x_0}) = gx_0$ と定義すると, $\bar{p}$ は同相写像である:

$$G/G_{x_0} \simeq X$$

この命題の証明は開写像定理 (命題74) および準同型定理 (命題81) と本質的に同じであるので (また本書ではこの命題を用いないので) その証明を各自にまかすことにする. (証明はたとえば松島与三著, 多様体入門, 裳華房167頁にある).

写像 $j: G(n-1, K) \to G(n, K)$ を $j(A) = \begin{pmatrix} A & \\ & 1 \end{pmatrix}$ と定義すると j は位相群としての同型 $G(n-1, K) \cong j(G(n-1, K))$ を与えている. したがって j を省略して $G(n-1, K)$ を $G(n, K)$ の部分群とみなすことにする:

$$G(n-1, K) \subset G(n, K)$$

$A \in G(n, K)$ が $A \in G(n-1, K)$ であるための必要十分条件は $Ae_n = e_n$ である.

定理15. 写像 $p: G(n, K) \to S_K{}^{n-1}$; $p: SG(n, K) \to S_K{}^{n-1}$

$$p(A) = Ae_n$$

はそれぞれつぎの位相空間としての同型を誘導する.

$$O(n)/O(n-1) \simeq S^{n-1} \qquad SO(n)/SO(n-1) \simeq S^{n-1}$$
$$U(n)/U(n-1) \simeq S^{2n-1} \qquad SU(n)/SU(n-1) \simeq S^{2n-1}$$
$$Sp(n)/Sp(n-1) \simeq S^{4n-1}$$

証明 写像 $\mu: G(n, K) \times S_K{}^{n-1} \to S_K{}^{n-1}$, $\mu(A, \boldsymbol{a}) = A\boldsymbol{a}$ により $G(n, K)$ は $S_K{}^{n-1}$ に働く (例106). さらにこの働き方は推移的である. 実際, $\boldsymbol{a} \in S_K{}^{n-1}$ に対して $\boldsymbol{a}$ を最後に含む K^n の正規直交基 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}$ をとり (補題14), 行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a})$ をつくると $A \in G(n, K)$ であって (補題16), かつ $Ae_n = \boldsymbol{a}$ となるからである. $G(n, K)$ の e_n における等方群は明らかに $G(n-1, K)$ である. $G(n, K)$ がコンパクト群であり (定理7), かつ $S_K{}^{n-1}$ が Hausdorff 空間であることに注意して命題84を用いると, $G(n, K)/G(n-1, K) \simeq S_K{}^{n-1}$ を得る. また写像 $\mu: SG(n, K) \times S_K{}^{n-1} \to S_K{}^{n-1}$, $\mu(A, \boldsymbol{a}) = A\boldsymbol{a}$ により $SG(n, K)$ は $S_K{}^{n-1}$ に推移的に働く. 推移的であることは, $\boldsymbol{a} \in$

S_K^{n-1} に対して上記と同じ $A=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{a})$ をつくり，$A'=((\det A^{-1})\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{a})$ とおくと，$A'\in SG(n,K)$ でありかつ $A'\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{a}$ となるからである．$SG(n,K)$ の $\boldsymbol{e}_n$ における等方群は $SG(n-1,K)$ であるから，$SG(n,K)$ のコンパクト群である（命題7）ことに注意して命題84を用いると，$SG(n,K)/SG(n-1,K)\simeq S_K^{n-1}$ を得る．

例 110.　$SO(n)/SO(n-1)\simeq S^{n-1}$, $SU(n)/SU(n-1)\simeq S^{2n-1}$ において $n=2$ とおくと $SO(2)\simeq S^1$, $SU(2)\simeq S^3$ を得る（例51, 54. 実は位相群として同型である）．

写像　$j:G(n-1,K)\times G(1,K)\longrightarrow G(n,K)$　を　$j(A,a)=\begin{pmatrix}A & \\ & a\end{pmatrix}$

と定義すると j は位相群としての同型 $G(n-1,K)\times G(1,K)\cong j(G(n-1,K)\times G(1,K))$ を与えている．したがって j を省略して $G(n-1,K)\times G(1,K)$ を $G(n,K)$ の部分群とみなすことにする：

$$G(n-1,K)\times G(1,K)\subset G(n,K)$$

$A\in G(n,K)$ が $A\in G(n-1,K)\times G(1,K)$ であるための必要十分条件は $AE_n=E_nA$ である．なお $G(1,K)$ は $S_K{}^0=S^{d-1}$ と位相群として同型であるから，つぎの定理では $G(1,K)$ の代りに S^{d-1} とかくことにした．

定理 16.　写像 $p:G(n,K)\to KP(n-1)$,

$$p(A)=AE_nA^*$$

はつぎの位相空間としての同型を誘導する．

$$O(n)/(O(n-1)\times S^0)\simeq \boldsymbol{R}P(n-1)$$
$$U(n)/(U(n-1)\times S^1)\simeq \boldsymbol{C}P(n-1)$$
$$Sp(n)/(Sp(n-1)\times S^3)\simeq \boldsymbol{H}P(n-1)$$

証明　写像 $\mu:G(n,K)\times KP(n-1)\to KP(n-1)$, $\mu(A,X)=AXA^*$ により $G(n,K)$ は $KP(n-1)$ に推移的に働く．推移的であることは，$X\in KP(n-1)$ がある $A\in G(n,K)$ により $X=AE_nA^*$ と表わせる（補題27(2)）ことにほかならない．$G(n,K)$ の E_n における等方群は $G(n-1,K)\times G(1,K)$ である．実際，$A\in G(n,K)$ に対しては $AE_nA^*=E_n$ と $AE_n=E_nA$ は同じであるからである．さて $G(n,K)$ がコンパクトである（定理7）ことと $KP(n-1)$ が Hausdorff 空間である（定理14）ことに注意して命題84を用いると $G(n,K)/(G(n-1,K)\times G(1,K))\simeq KP(n-1)$を得る．

（3）　連続な断面

命題5の $G\approx(G/H)\times H$ を位相群の場合に拡張しよう．位相群のときには一般には

$G \simeq (G/H) \times H$（同相）とはならないが，同相になるための必要十分な解答がつぎの命題である．

命題 86. G を位相群，H を G の部分群とし，$p: G \to G/H$ を射影とする．このとき，p の連続な断面 $s: G/H \to G$ が存在すれば G は $(G/H) \times H$ に同相である：

$$G \simeq (G/H) \times H$$

証明 写像 $f: G \to (G/H) \times H$, $g: (G/H) \times H \to G$ をそれぞれ

$$f(x) = (xH, (s(xH))^{-1}x), \qquad g(A, h) = s(A)h$$

と定義するとき，写像 s が連続であるから f, g も連続である．そして命題5の証明で示したように $gf = 1$, $fg = 1$ がなりたつから f は同相写像である．したがって G と $(G/H) \times H$ は同相である．

命題86と同じ内容であるが，つぎの形で述べておく方が使いよいかも知れない．

命題 87. 位相群 G が位相空間 X に働いているとし，1点 $x_0 \in X$ を定めて写像 $p: G \to X$ を $p(g) = gx_0$ と定義する．このとき，もし p が連続な断面 $s: X \to G$ $(ps = 1_X)$ をもつならば，G の x_0 における等方群を H とすると G は $X \times H$ に同相である：

$$G \simeq X \times H$$

証明 写像 $f: G \to X \times H$, $f': X \times H \to G$ をそれぞれ

$$f(g) = (p(g), (s(p(g)))^{-1}g), \qquad f'(x, h) = s(x)h$$

と定義するとき $((s(p(g)))^{-1})g \in H$ に注意)，s が連続であるから f, f' も連続であり，かつ $f'f = 1$, $ff' = 1$ がなりたつことが命題5と全く同じにすると確められる．よって f は同相写像である．

例 111. 射影 $p: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} (\simeq S^1)$ は連続な断面をもたない．実際，もし p が連続な断面 $s: \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{R}$ をもつとすると，命題86により $\boldsymbol{R} \simeq (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \times \boldsymbol{Z}$（同相）となるが，これは矛盾である．なぜなら $\boldsymbol{R}$ は弧状連結であるが，一方 $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \times \boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{Z}$ が弧状連結ではないので弧状連結でない（命題60）からである．

定理 17. つぎの空間は位相空間として同型である：

$$O(n) \simeq S^0 \times SO(n)$$
$$U(n) \simeq S^1 \times SU(n)$$

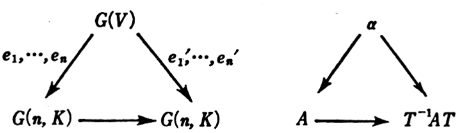
証明 写像 $\mu: G(n, K) \times S_K{}^0 \to S_K{}^0$, $\mu(A, a) = (\det A)a$ により $G(n, K)$ は $S_K{}^0$ に働いている．1点 $1 \in S_K{}^0$ をとり，写像 $p: G(n, K) \to S_K{}^0$, $p(A) = (\det A)1$ をつくると，$p = \det$ であり，また $G(n, K)$ の1における等方群は $SG(n, K)$ である．さて写

像 $s: S_K{}^0 \to G(n, K)$ を $s(a) = \begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ と定義すると，s は連続でありかつ det $(s(a)) = a$ であるから p の 1 つの連続な断面である．よって命題 87 より $G(n, K) \simeq S_K{}^0 \times SG(n, K)$ を得る．

定理 17 は $O(n)$, $U(n)$ の位相を調べるには（S^0, S^1 の位相は比較的よくわかっているので）それぞれ $SO(n)$, $SU(n)$ の位相を調べれば十分であることを示している．しかし $O(n)$ と $S^0 \times SO(n)$ $(n \geqq 2)$；$U(n)$ と $S^1 \times SU(n)$ $(n \geqq 2)$ は位相群としては同型ではないので $O(n)$, $U(n)$ の群構造はそれぞれ S^0, $SO(n)$；S^1, $SU(n)$ の群構造を別々に調べると十分であるというわけにはいかない．

位相群 G とその部分群 H を与えたとき，もし射影 $p: G \to G/H$ が連続な断面 $s: G/H \to G$ をもてば $G \simeq (G/H) \times H$ となるので，G の位相の問題は G/H と H の位相の問題に帰着される．だから p が連続な断面をもつかどうかは非常に重要な問題であるが，また大そう難かしい問題でもある．たとえば $G(m+n, K) \to G(m+n, K)/G(n, K)$ が連続な断面をもつための m, n の条件は相当調べられているが完全解はまだのようである．

V を内積をもつ n 次元 K-右加群とする．このとき V に正規直交基 $e_1, \cdots, e_n$ を 1 つ定めることにより $G(V)$ と $G(n, K)$ は群として同型であった（45 頁）が，さらに $G(n, K)$ の位相をこの同型写像により $G(V)$ に導入することにする．すなわち $G(V)$ は位相群として $G(n, K)$ と同一視するわけである．この同一視の仕方は V の正規直交基のとり方に関係しているが位相群の構造は変らないのである．実際，V に他の正規直交基 $e_1{}', \cdots, e_n{}'$ をとるとき，$\alpha \in G(V)$ のこれらの基に関する行列をそれぞれ A, B とするとき，A, B はある行列 T により $B = T^{-1}AT$ の関係にある（補題 11）．（$e_1, \cdots, e_n$；$e_1{}', \cdots, e_n{}'$ が正規直交基であるから，補題 11 の証明における T は $T \in G(n, K)$ である（補題 17））．そして $A \in G(n, K)$ に $B = T^{-1}AT \in G(n, K)$ に対応させる写像 τ: $G(n, K) \to G(n, K)$ は位相群の同型写像となっているからである．



定理 18. つぎの空間は位相空間として同型である．

$$SO(4) \simeq S^3 \times SO(3) \qquad SO(8) \simeq S^7 \times SO(7)$$

$$O(4) \simeq S^3 \times O(3) \qquad O(8) \simeq S^7 \times O(7)$$

証 明　$O(n) \simeq S^0 \times SO(n)$ である（定理 17）から，$SO(4)$, $SO(8)$ について証明しておけば $O(4)$, $O(8)$ に対しては明らかになりたつ．なお $SO(4)$, $SO(8)$ について証明するのであるが，そのために $O(n)$ の単位元を含む弧状連結成分が $SO(n)$ であることを用いるが，いまはそれを仮定しておく（証明は定理 20 (2)）．さて $SO(4)$ を $\boldsymbol{H}$ における回転群：$SO(4) = SO(\boldsymbol{H})$ とし，$SO(3)$ を $1 \in \boldsymbol{H}$ を不変にする $SO(4)$ の部分群とする：$SO(3) = \{\alpha \in SO(4) \mid \alpha(1) = 1\}$．$S^3 = S_{\boldsymbol{H}}{}^0$ とするとき，写像 $\mu : SO(4) \times S^3 \to S^3$, $\mu(\alpha, a) = \alpha(a)$ により $SO(4)$ は S^3 に働いており，かつ $SO(4)$ の 1 における等方群は $SO(3)$ である．写像 $p : SO(4) \to S^3$ を $p(\alpha) = \alpha(1)$ とする．$a \in S^3$ に対し，写像 $s(a) : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ を $s(a)x = ax$ と定義すると $s(a) \in O(\boldsymbol{H}) = O(4)$ である（例 64）から，s は連続な写像 $s : S^3 \to O(4)$ を定義する．さらに $s : S^3 \to SO(4)$ である．実際，S^3 は弧状連結である（定理 4）から，その連続像 $s(S^3)$ も弧状連結である（命題 59）．しかるに $s(1) = 1$ であるから $s(S^3)$ は $O(4)$ の単位元 1 を含む弧状連結成分 $SO(4)$ に含まれる：$s(S^3) \subset SO(4)$．この写像 $s : S^3 \to SO(4)$ は明らかに p の連続な断面になっているから，命題 87 より $SO(4) \simeq S^3 \times SO(3)$ を得る．$SO(8) \simeq S^3 \times SO(7)$ は Cayley 数体 $\mathfrak{C}$ を用いて，$SO(8) = SO(\mathfrak{C})$, $SO(7) = \{\alpha \in SO(8) \mid \alpha(1) = 1\}$, $S^7 = \{x \in \mathfrak{C} \mid |x| = 1\}$ として上記と同様にするとよい．

(4)　軌道空間

定 義　位相群 G が位相空間 X に（右より）働いているとする．このとき X において

$$x \sim y \iff y = xg \quad \text{となる} \quad g \in G \quad \text{が存在する}$$

と定義すると関係 $\sim$ は同値法則をみたす．この関係 $\sim$ による X の等化空間 $X/\sim$ を X/G で表わし，X の G による**軌道空間**という．

例 112.　位相群 G の部分群 H は，写像 $\mu : G \times H \to G$, $\mu(x, h) = xh$ により G に右から働く（例 105 参照）が，G の H による軌道空間 G/H は等質空間 G/H にほかならない．

等質空間のときの命題 77, 78 と同様に，つぎの補題 88, 89 がなりたつことを示し，さらに射影空間が球面の軌道空間であることを示そう．

補題 88.　位相群 G が位相空間 X に働いているとする．このとき射影

$$p : X \to X/G \qquad p(x) = xG^{\dagger}$$

は（連続な全射）開写像である．

証明　O を X の開集合とする．$p^{-1}(p(O)) = OG^{\dagger} = \bigcup_{g\in G} Og$ において，Og は X の開集合であるから，その和集合である $\bigcup_{g\in G} Og = p^{-1}(p(O))$ は X の開集合である．等化位相の定義より，これは $p(O)$ が X/G の開集合であることを示している．よって p は開写像である．

補題 89.　コンパクト群 G が Hausdorff 空間 X に働いているとき，その軌道空間 X/G は Hausdorff 空間である．

証明　$[x]$，$[y]$ を X/G の相異なる 2 点とする．$[x] \neq [y]$ は $xG \cap yG = \phi$ のことである．xG, yG はコンパクトであるから，X の開集合 O_1, O_2 を

$$O_1 \cap O_2 = \phi,\ xG \subset O_1,\ yG \subset O_2 \qquad \text{(i)}$$

となるようにとれる．実際，yG はコンパクトであるから，各点 $a \in xG$ に対して a の近傍 U_a と yG を含む X の開集合 O_a を $U_a \cap O_a = \phi$ となるように選ぶ（補題 48 (2) の証明の中にある）．xG をこのような近傍 U_a で覆う：$xG \subset \bigcup_{a\in xG} U_a$. xG はコンパクトであるから，有限個の点 $a_1, \cdots, a_m \in X$ をとりだして $xG \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i}$ にできる．$O_1 = \bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i}$, $O_2 = \bigcap_{i=1}^{m} O_{a_i}$ とおくと O_1, O_2 は X の開集合であり，(i) をみたしている．つぎに，写像 $\mu : X \times G \to X$, $\mu(x, g) = xg$ は連続であるから，各元 xg の近傍 O_1 に対して，x の近傍 U_g と g の近傍 V_g を $U_g V_g \subset O_1$ をみたすようにとることができる（補題 45 (1)）．G をこのような近傍 V_g で覆う：$G = \bigcup_{g\in G} V_g$. G がコンパクトであるから，有限個の $g_1, \cdots, g_k$ を選んで $G = \bigcup_{j=1}^{k} V_{g_j}$ にできる．$U_1 = \bigcap_{j=1}^{k} U_{g_j}$ とおくと，U_1 は x の近傍であり，かつ

$$xG \subset U_1 G \subset O_1$$

をみたしている．同様にして，y の近傍 U_2 を

$$yG \subset U_2 G \subset O_2$$

をみたすようにとることができる．このとき $U_1 G \cap U_2 G \subset O_1 \cap O_2 = \phi$ である．射影 $p : X \to X/G$ は開写像である（補題 88）から $p(U_1), p(U_2)$ はそれぞれ $[x], [y]$ の近傍であり，かつ $U_1 G \cap U_2 G = \phi$ は $p(U_1) \cap p(U_2) = \phi$ を意味している．よって X/G

† X の部分集合 A と G の部分集合 B に対して，記号 AB で X の部分集合 $\{ab \mid a \in A, b \in B\}$ を表わす．

は Hausdorff 空間である.

定理 19. $K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする. 写像 $\mu: S_K{}^{n-1}\times S_K{}^0 \to S_K{}^{n-1}$, $\mu(\boldsymbol{a}, a)=\boldsymbol{a}a$ により位相群 $S_K{}^0$ は球面 $S_K{}^{n-1}$ に右から働き, かつその軌道空間 $S_K{}^{n-1}/S_K{}^0$ は射影空間 KP_{n-1} に同相である：

$$S^{n-1}/S^0 \simeq \boldsymbol{R}P_{n-1}, \qquad S^{2n-1}/S^1 \simeq \boldsymbol{C}P_{n-1}, \qquad S^{4n-1}/S^3 \simeq \boldsymbol{H}P_{n-1}$$

証明 $S_K{}^{n-1}$ の $S_K{}^0$ による軌道空間 $S_K{}^{n-1}/S_K{}^0$ は定理 13 における等化空間 $S_K{}^{n-1}/\sim$ にほかならない. よって定理は定理 13 のいいかえにすぎない.

$S_K{}^0$ はコンパクト群であるから, $S_K{}^{n-1}$ が Hausdorff 空間であることと補題 89 より, 射影空間 KP_{n-1} が Hausdorff 空間であることがわかる (101 頁参照).

§6. 指数行列

われわれは解析学で

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$\log x = -(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{(1-x)^3}{3}-\cdots-\frac{(1-x)^n}{n}-\cdots \qquad (|1-x|<1)$$

の Taylor 展開を知っている. さらに一般に, 実数 x を行列 $X\in M(n, K)$ におきかえても e^X, $\log X$ ($\|E-X\|<1$) が定義される. そしてこの指数関数 e^X と対数関数 $\log X$ はたがいに逆関数であり, いわゆる Lie 群とその Lie 環とを結びつける重要な関数である (たとへば山内恭彦・杉浦光夫著, 連続群論入門, 培風館). ここでは指数関数についてのみ述べることにし, 古典群の弧状連結性の証明に用いよう.

(1) 指数行列

$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする.

定義 $X\in M(n, K)$ に対して $\exp X\in M(n, K)$ を

$$\exp X = E+X+\frac{X^2}{2!}+\frac{X^3}{3!}+\cdots+\frac{X^n}{n!}+\cdots$$

と定義し，行列 X の **指数行列** という．$\exp X$ が定義されるためには $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}$ が収束することを証明しなければならない．しかるに

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{X^k}{k!}\right\| \leqq \|E\| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|X\|^k}{k!} = \|E\| + e^{\|X\|} - 1 < \infty$$

であるから $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}$ は絶対収束する．よって $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X^k}{k!}$ は収束する（補題 34）．

例 113. $X = \begin{pmatrix} & -\theta \\ \theta & \end{pmatrix} \in M(2, \boldsymbol{R})$ に対して $\exp X$ を求めよう．

$$\exp X = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & -\theta \\ \theta & \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} & -\theta \\ \theta & \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} & -\theta \\ \theta & \end{pmatrix}^3 + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & -\theta \\ \theta & \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} -\theta^2 & \\ & -\theta^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} & \theta^3 \\ -\theta^3 & \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots & -\theta + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \cdots \\ \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots & 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2)$$

例 114. $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M(n, \boldsymbol{C})$ のとき

$$\exp X = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

である．特に $X = \begin{pmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{pmatrix}$, $\theta_k \in \boldsymbol{R}$ に対しては

$$\exp X = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

である．

$\boldsymbol{R}$ において $e^{s+t} = e^s e^t$ がなりたつことを拡張してつぎの命題がなりたつ．

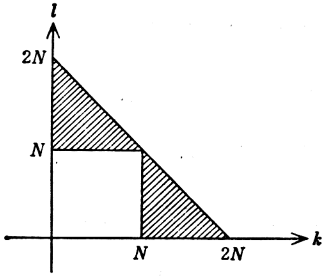
命題 90. $X, Y \in M(n, K)$ が $XY = YX$ をみたすならば

$$\exp(X + Y) = \exp X \exp Y$$

がなりたつ．

証明　X, Y は可換であるから2項定理が使えて

$$\sum_{m=0}^{2N}\frac{(X+Y)^m}{m!}=\sum_{m=0}^{2N}\sum_{\substack{k+l=m\\k,l\geqq 0}}\frac{X^kY^l}{k!\,l!}=\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{X^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{N}\frac{Y^l}{l!}\right)+R_N \qquad \text{(i)}$$



ここに $R_N=\sum_{\substack{\max\{k,l\}>N\\k+l\leqq 2N}}\frac{X^kY^l}{k!\,l!}$ となる．R_N における項の数は $N(N+1)$ である．いま $\max\{\|X\|, 1, \|Y\|\}=a$ とおくと $\|R_N\|\leqq\sum\frac{\|X\|^k\|Y\|^l}{k!\,l!}\leqq N(N+1)\frac{a^{2N}}{N!}\to 0\ (N\to\infty)$ となるので (i) で $N\to\infty$ とすると $\exp(X+Y)=\exp X\exp Y$ を得る．

exp のもつ性質をいくつか列記しておこう．

補題91.　$X\in M(n, K)$ に対してつぎの式がなりたつ．

(1)　$\exp X\in GL(n, K)$，かつ $(\exp X)^{-1}=\exp(-X)$ である．

(2)　$\exp(T^{-1}XT)=T^{-1}(\exp X)T,\quad T\in GL(n, K)$

(3)　$(\exp X)^*=\exp X^*$

(4)　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ ならば ${}^t(\exp X)=\exp {}^tX$

(5)　$X\in M(n, \boldsymbol{C})$ の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とするとき，$\exp X$ の固有値は $e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}$ である．

(6)　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ ならば $\det(\exp X)=e^{\mathrm{tr}(X)}$

証明　(1)　$\exp X\exp(-X)=\exp(X+(-X))$ (命題90) $=\exp 0=E$ であるから $\exp X\in GL(n, K)$ かつ $\exp(-X)=(\exp X)^{-1}$ である．

(2)　$(T^{-1}XT)^k=T^{-1}X^kT$ であるから $\exp(T^{-1}XT)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(T^{-1}XT)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^{-1}X^kT}{k!}=T^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}\right)T=T^{-1}(\exp X)T$ となる．

(3)　一般に $(XY)^*=Y^*X^*$ がなりたつので k に関する帰納法を用いると $(X^k)^*=(X^*)^k$ がなりたつことがわかる．さて $(\exp X)^*=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}\right)^*=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(X^k)^*}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(X^*)^k}{k!}=\exp X^*$ である．

(4)　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ のときは，${}^t(XY)={}^tY{}^tX$ がなりたつから ${}^t(X^k)=({}^tX)^k$ となるので (3) と同様にすると，${}^t(\exp X)=\exp {}^tX$ を得る．

(5)　$X\in M(n, \boldsymbol{C})$ はある $A\in U(n)$ により $A^{-1}XA=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ に変形できる

(補題21) ので $A^{-1}(\exp X)A = \exp(A^{-1}XA) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$ (例114) となる. したがって $\exp X$ の固有値は $e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}$ である.

(6) $K = \boldsymbol{C}$ のとき (5) と同じ記号を用いると $\det(\exp X) = \det(A^{-1}(\exp X)A) = \det(\exp(A^{-1}XA)) = e^{\lambda_1}\cdots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n} = e^{\mathrm{tr}(A^{-1}XA)} = e^{\mathrm{tr}(X)}$ (48頁欄外) を得る. $K = \boldsymbol{R}$ のときにも $X \in M(n, \boldsymbol{R})$ を $X \in M(n, \boldsymbol{C})$ と思って上記の結果を用いるとよい ($e^{\mathrm{tr}(X)} \in \boldsymbol{R}$ に注意).

例 115. $X \in M(n, \boldsymbol{R})$ が ${}^tX = -X$ をみたす (このような行列 X を**実歪対称行列**という) ならば, $\exp X \in O(n)$ (実は $\exp X \in SO(n)$) である. 実際, $(\exp X){}^t(\exp X) = (\exp X)(\exp {}^tX) = (\exp X)(\exp(-X)) = \exp(X + (-X)) = \exp 0 = E$ (補題91) である.

例 116. $X \in M(n, \boldsymbol{C})$ が $X^* = -X$ をみたす (このような行列 X を**複素歪 Hermite 行列**という) ならば $\exp X \in U(n)$ である. 実際, $(\exp X)(\exp X)^* = (\exp X)(\exp X^*) = (\exp X)(\exp(-X)) = \exp(X + (-X)) = \exp 0 = E$ (補題91) である. 同様に $X \in M(n, \boldsymbol{H})$ が $X^* = -X$ をみたすならば $\exp X \in Sp(n)$ である.

命題 92. 写像 $\exp : M(n, K) \to GL(n, K)$ は連続である.

証明 $\lim_{m\to\infty} X_m = X$ ならば $\lim_{m\to\infty} \exp X_m = \exp X$ となることを示そう. $X_1, X_2, \cdots, X_m, \cdots$ は収束するから有界である (補題30(2)). すなわち $\|X\|, \|X_m\| \leqq a$ $(m = 1, 2, \cdots)$ をみたす $a \in \boldsymbol{R}$ が存在する. さて

$$\left\|\sum_{k=0}^{N} \frac{X_m{}^k}{k!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{X^k}{k!}\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}(X_m{}^k - X^k)\right\|$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}\|X_m{}^k - X^k\| \leqq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} ka^{k-1}\|X_m - X\| \quad \text{(補題18(2))}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!}\|X_m - X\| \leqq e^a\|X_m - X\|$$

において $N \to \infty$ とすると $\|\exp X_m - \exp X\| \leqq e^a\|X_m - X\|$ を得る. さらにこの式において $m \to \infty$ とすると $\|\exp X_m - \exp X\| \to 0$, すなわち $\lim_{m\to\infty} \exp X_m = \exp X$ となる. 以上で exp の連続であることが証明された.

例 117. $X \in M(n, K)$ に対して, 写像 $f : \boldsymbol{R} \to GL(n, K)$ を $f(t) = \exp tX$ と定義すると f は連続な準同型写像である. 実際, $\lim_{m\to\infty} t_m = t$ のとき $\lim_{m\to\infty} t_m X = tX$ であるか

ら, $\lim_{m\to\infty} \exp t_m X = \exp tX$ (命題 92) となり f が連続であることがわかる. また $f(s+t) = \exp(s+t)X = \exp(sX+tX) = (\exp sX)(\exp tX)$ (命題 90) $= f(s)f(t)$ となるから f は準同型写像である. 一般に G を位相群 (さらに G を Lie 群とするときが多い) とするとき, 連続な準同型写像 $f: \boldsymbol{R} \to G$ を G の **1 助変数部分群** といい, これは G の群論的, かつ位相的構造を調べるのに非常に重要な役割を果す写像である. (ポントリャーギン著：位相群論, 岩波書店), 特に写像 $u: I=[0, 1] \to GL(n, K)$, $u(t) = \exp tX$ は単位元 E と $\exp X$ を結ぶ $GL(n, K)$ の道である.

(2) 古典群の弧状連結性

古典群 $G(n, K)$, $SG(n, K)$ の弧状連結性を調べるのが目的であるがその方法にいろいろある. (1) 群の各元をその単位元と具体的な道 (たとえば 1 助変数部分群) で結ぶ. (2) ファイバー空間の性質を用いる. (3)「G を位相群とし, H を G の部分群とするとき, G/H と H が連結ならば G も連結である」という定理を $G(n, K)/G(n-1, K) \simeq S_K{}^{n-1}$, $SG(n, K)/SG(n-1, K) \simeq S_K{}^{n-1}$ (定理 15) に用いて $G(n, K)$, $SG(n, K)$ の連結性を調べる (Chevalley, Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press). ついで $G(n, K)$, $SG(n-1, K)$ が多様体であること (定理 44) を示してからその弧状連結性 (82 頁欄外) を調べる. (2) の方法については 193 頁で示す. ここでは (1) の方法で弧状連結性を調べよう.

定理 20. (1) $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ は弧状連結群である.

(2) $O(n)$ は弧状連結ではない. $O(n)$ の弧状連結成分の個数は 2 であり, かつ単位元 E を含む弧状連結成分が $SO(n)$ である.

証明 (1) まず $SO(n)$ が弧状連結であることを示そう. $A \in SO(n)$ はある $B \in O(n)$ により

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_m & \\ & & & (1) \end{pmatrix}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$$

に変形される (命題 25 (1)). いま

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & X_m & \\ & & & (0) \end{pmatrix}, \qquad X_k = \begin{pmatrix} & -\theta_k \\ \theta_k & \end{pmatrix}$$

(ここに記号 (0) は n が偶数のとき空であり, n が奇数のときには 0 を表わすものとす

る）とおくと，$\exp X = B^{-1}AB$ となり，かつ任意の $t \in \boldsymbol{R}$ に対して $\exp tX \in SO(n)$ である（例 113, 115）．よって $A = B(\exp X)B^{-1} = \exp(BXB^{-1})$，かつ $\exp(tBXB^{-1}) = B(\exp tX)B^{-1} \in SO(n)$ （$t \in \boldsymbol{R}$）である．さて写像 $u : I \to SO(n)$ を $u(t) = \exp(tBXB^{-1})$ と定義すると u は単位元 E と A を結ぶ $SO(n)$ の道である（例 117）．よって $SO(n)$ は弧状連結である．

つぎに $U(n)$ が弧状連結であることを示そう．$A \in U(n)$ はある $B \in U(n)$ により

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}, \quad \theta_k \in \boldsymbol{R}$$

に変形される（命題 25 (2)）．

$$X = \begin{pmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{pmatrix}$$

とおくと $\exp X = B^{-1}AB$ であり，かつ任意の $t \in \boldsymbol{R}$ に対して $\exp tX \in U(n)$ である（例 114, 116）．したがって $A = \exp(BXB^{-1})$, $\exp(tBXB^{-1}) \in U(n)$ （$t \in \boldsymbol{R}$）である．さて写像 $u : I \to U(n)$ を $u(t) = \exp(tBXB^{-1})$ と定義すると u は E と A を結ぶ $U(n)$ の道である．よって $U(n)$ は弧状連結である．$SU(n)$ については $U(n) \simeq S^1 \times SU(n)$ である（定理 17）ことを用いると，$U(n)$ が弧状連結であることより $SU(n)$ の弧状連結であることが導かれる（命題 60）．

$Sp(n)$ が弧状連結であることも命題 25 (3) を用いると $U(n)$ のときと全く同様にして証明される．

（2） $O(n) \simeq S^0 \times SO(n)$ であり（定理 17），かつ S^0 が 2 つの弧状連結成分をもち（例 92），$SO(n)$ が弧状連結であることから (2) が導かれる（命題 60）．

$SO(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$ の弧状連結であることの証明において，単位元 E と各元 A を結ぶ道として 1 助変数部分群がとれるということは重要なことなのである．一般につぎの定理がなりたつことが知られている．

定理 (Hopf) G を (弧状)連結コンパクト Lie 群とするとき，任意の点 $g \in G$ に対して g を通る 1 助変数部分群が存在する．

（3） Hermite 行列と正値 Hermite 行列

写像 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^+$, $f(x) = e^x$ は同相写像である．このことの拡張であるつぎの命題 97 を証明することを目的とする．

まず，つぎの記号を導入しておく．$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とし

$$D\mathfrak{J}(n,K)=\{D\in\mathfrak{J}(n,K)\mid D \text{ は対角線形の行列}\}^{\dagger}$$

$$D\mathfrak{J}_+(n,K)=\{D\in\mathfrak{J}_+(n,K)\mid D \text{ は対角線形の行列}\}^{\dagger}$$

とおく．

補題 93.　$\exp: D\mathfrak{J}(n,K)\to D\mathfrak{J}_+(n,K)$ は同相写像である．

証明　$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\in D\mathfrak{J}(n,K)$ $(\lambda_k\in\boldsymbol{R})$ ならば $\exp D=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}\in D\mathfrak{J}_+(n,K)$ であり，写像 exp の逆写像は $P=\begin{pmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix}\in D\mathfrak{J}_+(n,K)$ $(\mu_k>0)$ に対して $D=\begin{pmatrix}\log\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \log\mu_n\end{pmatrix}\in D\mathfrak{J}(n,K)$ を対応させる写像である．この対応を log とかくと明らかに exp, log は連続であるから $D\mathfrak{J}(n,K)$ と $D\mathfrak{J}_+(n,K)$ は写像 exp により同相である．

補題 94.　$X\in\mathfrak{J}(n,K)$, $A\in G(n,K)$ に対して

$$A(\exp X)=(\exp X)A \quad \text{ならば} \quad AX=XA$$

がなりたつ．

証明　まず X が対角線形の行列 $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ であるとき補題が正しいことを示そう．$\exp D=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}$ であるから，$A=(a_{ij})$ が $A(\exp D)=(\exp D)A$ ならば $(a_{ij}e^{\lambda_j})=(e^{\lambda_i}a_{ij})$，すなわち $a_{ij}e^{\lambda_j}=e^{\lambda_i}a_{ij}$, $i,j=1,\cdots,n$ がなりたつ．ゆえに $a_{ij}(e^{\lambda_j}-e^{\lambda_i})=0$ (λ_i が実数であることに注意)となる．さらに，これより $a_{ij}(\lambda_j-\lambda_i)=0$, $a_{ij}\lambda_j=\lambda_i a_{ij}$ となるので $AD=DA$ を得る．さて一般の $X\in\mathfrak{J}(n,K)$ に対しては，ある $B\in G(n,K)$ をとり $B^{-1}XB=D\in D\mathfrak{J}(n,K)$ にすることができる（命題 23)．仮定 $A(\exp X)=(\exp X)A$ より $A(\exp BDB^{-1})=(\exp BDB^{-1})A$, $AB(\exp D)B^{-1}=B(\exp D)B^{-1}A$. ゆえに $B^{-1}AB(\exp D)=(\exp D)B^{-1}AB$ となる．しかるに $B^{-1}AB\in G(n,K)$ であるから，上に述べたことより $B^{-1}ABD=DB^{-1}AB$ となる．よって，$ABDB^{-1}=BDB^{-1}A$，すなわち $AX=XA$ となる．

---

† 体を K としたが $D\in\mathfrak{J}(n,K)$の対角線の元は実数であるから $D\mathfrak{J}(n,K)=D\mathfrak{J}(n,\boldsymbol{R})$, $D\mathfrak{J}_+(n,K)=D\mathfrak{J}_+(n,\boldsymbol{R})$ である．

補題95. （1） $\mathfrak{S}(n, K)$ は $M(n, K)$ の閉集合である.

（2） $D\mathfrak{S}_+(n, K)$ は $GL(n, K)$ の閉集合である.

証明 （1） 写像 $f: M(n, K) \to M(n, K)$, $f(X) = X^* - X$ は連続であり（例 72）, かつ $\mathfrak{S}(n, K)$ は1点 $0 \in M(n, K)$ の f による逆像であるから $\mathfrak{S}(n, K)$ は $M(n, K)$ の閉集合である.

（2） 容易にわかるように $D\mathfrak{S}'(n, K) = \{D \in D\mathfrak{S}(n, K) \mid D$ の対角線の元 $\lambda_k \geqq 0$, $k = 1, \cdots, n\}$ は $M(n, K)$ の閉集合である. そして $D\mathfrak{S}_+(n, K) = D\mathfrak{S}'(n, K) \cap GL(n, K)$ であるから $D\mathfrak{S}_+(n, K)$ は $GL(n, K)$ の閉集合である.

補題96. $D_m \in D\mathfrak{S}(n, K)$, $m = 1, 2, \cdots$ に対して, もし $\exp D_1, \exp D_2, \cdots, \exp D_m, \cdots$ が収束するならば $D_1, D_2, \cdots, D_m, \cdots$ も収束する. そして $\lim_{m\to\infty} \exp D_m = P$, $\lim_{m\to\infty} D_m = D$ とおくと $P \in D\mathfrak{S}_+(n, K)$, $D \in D\mathfrak{S}(n, K)$ でありかつ $P = \exp D$ となる.

証明 $\exp D_m \in D\mathfrak{S}_+(n, K)$ であり, $D\mathfrak{S}_+(n, K)$ は $GL(n, K)$ の閉集合である（補題 95 (2)）から $P \in D\mathfrak{S}_+(n, K)$ である. しかるに $\log: D\mathfrak{S}_+(n, K) \to D\mathfrak{S}(n, K)$ は同相写像である（補題 93）から, $\lim_{m\to\infty} \exp D_m = P$ に log を施して $\lim_{m\to\infty} D_m = \log P = D \in D\mathfrak{S}(n, K)$ を得る.

さて, これらの補題を用いてつぎの命題を証明しよう.

命題97. $\exp: \mathfrak{S}(n, K) \to \mathfrak{S}_+(n, K)$ は同相写像である.

証明 （i） exp は全射である. 実際, 任意の $P \in \mathfrak{S}_+(n, K)$ を与える. P はある $A \in G(n, K)$ により $A^{-1}PA \in D\mathfrak{S}_+(n, K)$ にすることができる（命題 23）. $\exp: D\mathfrak{S}(n, K) \to D\mathfrak{S}_+(n, K)$ は全射である（補題 93）から, $A^{-1}PA \in D\mathfrak{S}_+(n, K)$ に対して $D \in D\mathfrak{S}(n, K)$ を $\exp D = A^{-1}PA$ となるようにとる. さて $X = ADA^{-1} = ADA^*$ とおくと, $X \in \mathfrak{S}(n, K)$ であって, $\exp X = \exp(ADA^{-1}) = A(\exp D)A^{-1} = AA^{-1}PAA^{-1} = P$ となる. よって exp は全射である.

（ii） exp は単射である. 実際, $X, Y \in \mathfrak{S}(n, K)$ に対して $\exp X = \exp Y$ $(= P)$ であるとする. X, Y に対して, それぞれ $A, B \in G(n, K)$ をとり $X = AD_XA^{-1}$, $Y = BD_YB^{-1}$; $D_X, D_Y \in D\mathfrak{S}(n, K)$ にすることができる（命題 23）. $\exp D_X = A^{-1}PA$, $\exp D_Y = B^{-1}PB$ であるから, $\exp D_X$ と $\exp D_Y$ はともに P と同じ固有値をもつ. したがって D_X と D_Y は同じ固有値をもつ. ゆえに D_X の対角線の成分をいれかえて D_Y と一致させることができる, すなわちある $C \in G(n, K)$ をとり $CD_XC^{-1} = D_Y$ とすることができる. さて

$$\exp X = \exp Y = \exp(BD_Y B^{-1}) = \exp(BCD_X C^{-1}B^{-1}) = \exp(BCA^{-1}XAC^{-1}B^{-1})$$
$$= \exp((BCA^{-1})X(BCA^{-1})^{-1}) = (BCA^{-1})(\exp X)(BCA^{-1})^{-1}$$

となるが，$BCA^{-1} \in G(n, K)$ であるからこれより $X = (BCA^{-1})X(BCA^{-1})^{-1}$ を得る（補題94）．すなわち $X = BCA^{-1}XAC^{-1}B^{-1} = BCD_XC^{-1}B^{-1} = BD_YB^{-1} = Y$ となる．よって exp は単射である．

(iii)　exp が連続写像であることは命題92で示した．

(iv) 最後に exp が閉写像であることを示そう．すなわち F を $\mathfrak{S}(n, K)$ の閉集合とするとき $\exp(F)$ が $\mathfrak{S}_+(n, K)$の閉集合であることを示そう．そのためには点列 $X_1, X_2, \cdots, X_m, \cdots \in F$ に対して $\lim_{m\to\infty} \exp X_m = P$, $P \in \mathfrak{S}_+(n, K)$ ならば，ある $X \in F$ が存在して $P = \exp X$ と表わされることを示すとよい．さて各 X_m に対して，$A_m \in G(n, K)$ をとり ${A_m}^{-1}X_mA_m = D_m \in D\mathfrak{S}(n, K)$ とする（命題23）．$G(n, K)$ はコンパクトである（定理3）から，点列 $A_1, A_2, \cdots, A_m, \cdots$ から収束する部分列 $A_{k_1}, A_{k_2}, \cdots, A_{k_m}, \cdots$ を選び出すことができる（命題56）．$\lim_{m\to\infty} A_{k_m} = A$ とおく．添数をかきかえることにより初めから $\lim_{m\to\infty} A_m = A$ であるとしておいても一般性を失なわないのでそうしておく．このとき

$$\lim_{m\to\infty} \exp D_m = \lim_{m\to\infty} \exp({A_m}^{-1}X_mA_m) = \lim_{m\to\infty} {A_m}^{-1}(\exp X_m)A_m = A^{-1}PA$$

となる．ゆえに $D_1, D_2, \cdots, D_m, \cdots$ は収束し，かつ $\lim_{m\to\infty} D_m = D$ とおくと $\exp D = A^{-1}PA$ となる（補題96）．よって $P = A(\exp D)A^{-1} = \exp(ADA^{-1})$ となる．しかるに $\lim_{m\to\infty} X_m = \lim_{m\to\infty} A_mD_m{A_m}^{-1} = ADA^{-1}$ であるが，F が $\mathfrak{S}(n, K)$ の閉集合であり，かつ $\mathfrak{S}(n, K)$ が $M(n, K)$ の閉集合である（補題95(1)）ことより，F は $M(n, K)$ の閉集合となるので，点列 $X_1, X_2, \cdots, X_m, \cdots \in F$ の極限 $A^{-1}DA$ は F の元である：$A^{-1}DA \in F$. よって exp が閉写像であることが示された．以上により命題が証明された．

この命題97からつぎの2つの補題が容易に導かれる．

補題98.　つぎの空間は位相空間として同型である．

$$\mathfrak{S}_+(n, \boldsymbol{R}) \simeq \boldsymbol{R}^{n(n+1)/2}, \quad \mathfrak{S}_+(n, \boldsymbol{C}) \simeq \boldsymbol{R}^{n^2}, \quad \mathfrak{S}_+(n, \boldsymbol{H}) \simeq \boldsymbol{R}^{n(2n-1)}$$

証明　$\mathfrak{S}_+(n, \boldsymbol{R}) \simeq \mathfrak{S}(n, \boldsymbol{R})$（命題97）$\simeq \boldsymbol{R}^{n(n+1)/2}$（補題29）．他の2つも同様である．

補題99.　(1)　$P, Q \in \mathfrak{S}_+(n, K)$ に対して

$$P^2 = Q^2 \quad ならば \quad P = Q$$

がなりたつ．

(2)　$P \in \mathfrak{S}_+(n, K)$ に対して ${P_1}^2 = P$ をみたす $P_1 \in \mathfrak{S}_+(n, K)$ がただ1つ存在する

(補題24と上記(1))ので，この P_1 を $\sqrt{P}$ と表わすならば，写像

$$h : \mathfrak{S}_+(n, K) \to \mathfrak{S}_+(n, K), \qquad h(P) = \sqrt{P}$$

は連続である.

証明 (1) $\exp : \mathfrak{S}(n, K) \to \mathfrak{S}_+(n, K)$ が全射であるから $P = \exp X$, $Q = \exp Y$; $X, Y \in \mathfrak{S}(n, K)$ とおくとき $P^2 = Q^2$ より $\exp 2X = \exp 2Y$ となる. exp が単射である(命題97)から，これより $2X = 2Y$, $X = Y$ となる. よって $P = Q$ となる.

(2) $\exp : \mathfrak{S}(n, K) \to \mathfrak{S}_+(n, K)$ は同相写像である(命題97)からこの逆写像を log で表わすことにすると，$\left(\exp\left(\frac{1}{2}\log P\right)\right)^2 = \exp\left(2\frac{1}{2}\log P\right) = \exp(\log P) = P$ である. ゆえに $\sqrt{P} = \exp\left(\frac{1}{2}\log P\right)$ である. exp, log が連続写像であるから写像 h は連続である.

(4) 一般線形群の極分解

われわれは0でない複素数 α は $\alpha = re^{i\theta}$ $(r > 0)$ と表わされることを知っている. この r を α で表わすと $r = \sqrt{\bar{\alpha}\alpha}$ である. そしてこのことを用いると $\boldsymbol{C}^* \simeq S^1 \times \boldsymbol{R}$ を示すことができた(例56, また例55も参照). この事実を一般線形群 $GL(n, K)$ に拡張しよう(定理21).

命題100. 正則行列 $A \in GL(n, K)$ は

$$A = UP, \qquad U \in G(n, K),\ P \in \mathfrak{S}_+(n, K)$$

の形に1通りに表わされる[†].

証明 A^*A をつくると $A^*A \in \mathfrak{S}_+(n, K)$ である. 実際, A^*A が Hermite 行列であることは明らかである. A^*A が正値であることは，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in K^n$ に対して $(A^*A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) \geqq 0$ であり，かつ等号がなりたつのは $A\boldsymbol{x} = 0$, A^{-1} を施して $\boldsymbol{x} = 0$ のときに限るからである(補題24(3)). ゆえに $P = \sqrt{A^*A}$ とおくと，P は正値 K-Hermite 行列である(補題99(2)). また $AP^{-1} = U$ とおくと，$U \in G(n, K)$ である. 実際，$(AP^{-1})^*(AP^{-1}) = (P^{-1})^*A^*AP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = E$. したがって A は $A = UP$, $U \in G(n, K)$, $P \in \mathfrak{S}_+(n, K)$ と表わせた. つぎに A のこのような表わし方が1通りであることを示そう. $A = UP = VQ$, $U, V \in G(n, K)$, $P, Q \in \mathfrak{S}_+(n, K)$ とするとき, $P^2 = PU^*UP = (UP)^*(UP) = A^*A = (VQ)^*(VQ) = QV^*VQ = Q^2$, これより $P =$

---

† $A \in GL(n, K)$ を $A = UP$, $U \in G(n, K)$, $P \in \mathfrak{S}_+(n, K)$ と表わす分解を正則行列 A の**極分解**という.

Q（補題 99 (1)）となる．したがって当然 $U=V$ となり，A の極分解の 1 意性が証明された．

命題 101. 写像 $f: G(n, K) \times \mathfrak{Z}_+(n, K) \to GL(n, K)$,

$$f(U, P) = UP$$

は同相写像である．

証明 命題 100 は f が全単射であることを示している．2 つの行列 U, P を掛ける写像は連続である（例 76）から f は連続である．f が同相写像であることを示すために，f の逆写像 $g: GL(n, K) \to G(n, K) \times \mathfrak{Z}_+(n, K)$ を明示しよう．写像 $h: GL(n, K) \to \mathfrak{Z}_+(n, K)$ を $h(A) = \sqrt{A^*A}$ と定義すると h は連続である（補題 99 (2)）．したがって写像 $k: GL(n, K) \to G(n, K)$, $k(A) = A(h(A))^{-1}$ も連続である．そして命題 100 の証明から f の逆写像 g は $g(A) = (k(A), h(A))$ で与えられるので，g は連続である．よって f は同相写像である．

この命題 101 と補題 98 を併せるとつぎの定理を得る．

定理 21. つぎの空間は位相空間として同型である．

$$GL(n, \boldsymbol{R}) \simeq O(n) \times \boldsymbol{R}^{n(n+1)/2}$$

$$GL(n, \boldsymbol{C}) \simeq U(n) \times \boldsymbol{R}^{n^2}$$

$$GL(n, \boldsymbol{H}) \simeq Sp(n) \times \boldsymbol{R}^{n(2n-1)}$$

定理 21 より一般につぎの定理がなりたつことが知られている．

定理 (**Cartan - Mal'cev - Iwasawa**) G を（弧状）連結 Lie 群とすると，G のあるコンパクト部分群 H が存在して，G は H とあるユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ の直積空間に同相になる：

$$G \simeq H \times \boldsymbol{R}^m$$

しかもこの H は本質的に G に対して 1 意に定まる．すなわちこのようなコンパクト部分群 H, H' が 2 つあると，ある元 $x \in G$ が存在して $H' = x^{-1}Hx$ となる．(K. Iwasawa, On some types of topological groups, Ann. of Math., 50, 1949).

この定理は（弧状）連結 Lie 群 G の位相を調べるためには，（弧状）連結なコンパクト Lie 群に限って考察すれば十分であることを示している．

位相群 G をコンパクト部分群 H とあるユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ の直積空間 $H \times \boldsymbol{R}^m$ に同相になるように分解すること（任意の位相群 G が分解可能とは限らないが）を G の**極分解**または**岩沢分解**という．

特殊線形群 $SL(n, K)$ の岩沢分解を与えよう.

補題 102. $A \in SL(n, K)$ の極分解を $A = UP$, $U \in G(n, K)$, $P \in \mathfrak{J}_+(n, K)$ とすると $U, P \in SL(n, K)$ である.

証明 $a = \det U^{-1}$ とおくと, $U^{-1} \in G(n, K)$ であるから $|a| = 1$ である. 一方, $A = UP$ の行列式をとると $1 = \det A = \det U \det P = a^{-1} \det P$, よって $a = \det P > 0$ である. ゆえに $|a| = 1$ より $a = 1$ がわかる. したがって $\det U = \det P = 1$ となる.

定理 22. つぎの空間は位相空間として同型である.

$$SL(n, \boldsymbol{R}) \simeq SO(n) \times \boldsymbol{R}^{(n+2)(n-1)/2}$$

$$SL(n, \boldsymbol{C}) \simeq SU(n) \times \boldsymbol{R}^{n^2-1}$$

証明

$$\mathfrak{J}^0(n, K) = \{X \in \mathfrak{J}(n, K) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$$

$$\mathfrak{J}_+{}^0(n, K) = \{P \in \mathfrak{J}_+(n, K) \mid \det P = 1\}$$

とおく. $\mathrm{tr}(X) = 0$ ならば $\det(\exp X) = e^{\mathrm{tr}(X)}$ (補題 91 (6)) $= e^0 = 1$ であるから, 写像 $\exp : \mathfrak{J}(n, K) \to \mathfrak{J}_+(n, K)$ は写像

$$\exp^0 : \mathfrak{J}^0(n, K) \longrightarrow \mathfrak{J}_+{}^0(n, K)$$

を誘導する. $\exp^0$ が同相写像であることを示そう. そのためには, $\exp : \mathfrak{J}(n, K) \to \mathfrak{J}_+(n, K)$ が同相写像である (命題 97) から, $\exp^0$ が全射であることを示すと十分である. さて $\exp$ は全射であるから, $P \in \mathfrak{J}_+{}^0(n, K)$ に対してある $X \in \mathfrak{J}(n, K)$ が存在して $P = \exp X$ となる. 行列式をとると $1 = \det P = \det(\exp X) = e^{\mathrm{tr}(X)}$ (補題 91 (6)), しかるに $X \in \mathfrak{J}(n, K)$ より $\mathrm{tr}(X)$ は実数であるから, $\mathrm{tr}(X) = 0$ となり $X \in \mathfrak{J}^0(n, K)$ である. よって $\exp^0$ が全射であることがわかった. そして $\mathfrak{J}^0(n, K)$ と $\mathfrak{J}_+{}^0(n, K)$ が同相であることが示された : $\mathfrak{J}^0(n, K) \simeq \mathfrak{J}_+{}^0(n, K)$. しかるに $\mathfrak{J}^0(n, K)$ は $\mathfrak{J}(n, K)$ の次元より 1 を引いた次元の $\boldsymbol{R}$ - 加群であることがすぐわかるから $\mathfrak{J}_+{}^0(n, \boldsymbol{R}) \simeq \mathfrak{J}^0(n, \boldsymbol{R}) \simeq \boldsymbol{R}^{(n+2)(n-1)/2}$, $\mathfrak{J}_+{}^0(n, \boldsymbol{C}) \simeq \mathfrak{J}^0(n, \boldsymbol{C}) \simeq \boldsymbol{R}^{n^2-1}$ となる. 写像 $f^0 : SG(n, K) \times \mathfrak{J}_+{}^0(n, K) \to SL(n, K)$ を $f^0(U, P) = UP$ と定義すると, 補題 102 は f^0 が全単射であることを示している. また f^0 が同相写像であることは命題 101 と全く同様にすると証明できるので, 上記の結果をあわせると定理が得られる.

$\boldsymbol{R}^m$ $(m \geqq 1)$ はコンパクトでない (例 78) が, 弧状連結である (例 90). よって $GL(n, K)$, $SL(n, K)$ の岩沢分解 (定理 21, 22) よりつぎの定理を得る (命題 52, 60, 定理 20).

定理 23. (1) $GL(n, \boldsymbol{R})$, $GL(n, \boldsymbol{C})$, $GL(n, \boldsymbol{H})$ $(n \geqq 1)$, $SL(n, \boldsymbol{R})$, $SL(n, \boldsymbol{C})$

($n \geqq 2$) はコンパクトではない．

（2） $GL(n, \boldsymbol{C})$, $GL(n, \boldsymbol{H})$, $SL(n, \boldsymbol{R})$, $SL(n, \boldsymbol{C})$ は弧状連結群である．

（3） $GL(n, \boldsymbol{R})$ は弧状連結ではない．その弧状連結成分の個数は2である．

つぎに，いくつかの位相群の岩沢分解を与えておこう．その証明はいずれも $SL(n, K)$ の岩沢分解（定理22）のときと同様にするとよい．

例 118.
$$GL^+(n, \boldsymbol{R}) = \{A \in GL(n, \boldsymbol{R}) \mid \det A > 0\}$$
は $GL(n, \boldsymbol{R})$ の部分群である．そしてその岩沢分解は
$$GL^+(n, \boldsymbol{R}) \simeq SO(n) \times \boldsymbol{R}^{n(n+1)/2}$$
で与えられる．これより $GL^+(n, \boldsymbol{R})$ は弧状連結群であることがわかり，さらに $GL^+(n, \boldsymbol{R})$ が $GL(n, \boldsymbol{R})$ の単位元 E を含む弧状連結成分であることがわかる．

例 119.
$$O(n, \boldsymbol{C}) = \{A \in M(n, \boldsymbol{C}) \mid {}^t\!AA = E\}$$
を**複素直交群**という．その岩沢分解は
$$O(n, \boldsymbol{C}) \simeq O(n) \times \boldsymbol{R}^{n(n-1)/2}$$
で与えられる．

例 120.
$$J = \begin{pmatrix} J' & & \\ & \ddots & \\ & & J' \end{pmatrix} \in M(2n, \boldsymbol{R}), \qquad J' = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$$
とし
$$Sp(n, \boldsymbol{R}) = \{A \in M(2n, \boldsymbol{R}) \mid {}^t\!AJA = J\}$$
$$Sp(n, \boldsymbol{C}) = \{A \in M(2n, \boldsymbol{C}) \mid {}^t\!AJA = J\}$$
をそれぞれ**実，複素シンプレクティック群**という．その岩沢分解はそれぞれ
$$Sp(n, \boldsymbol{R}) \simeq U(n) \times \boldsymbol{R}^{n(n+1)}$$
$$Sp(n, \boldsymbol{C}) \simeq Sp(n) \times \boldsymbol{R}^{n(2n+1)}$$
で与えられる．なおつぎの位相群としての同型
$$Sp(n, \boldsymbol{R}) \cap O(2n) \cong U(n)$$
$$Sp(n, \boldsymbol{C}) \cap U(2n) \cong Sp(n)$$
が存在することを注意しておこう（付録(3)）．

例 121.
$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, m \\ \\ \}\, n \end{matrix} \in M(m+n, \boldsymbol{R})$$

とし，

$$O(m, n) = \{A \in M(m+n, \boldsymbol{R}) \mid {}^tALA = L\}$$

を (m, n) 形の **Lorentz 群** という．その岩沢分解は

$$O(m, n) \simeq O(m) \times O(n) \times \boldsymbol{R}^{mn}$$

で与えられる．したがって Lorentz 群は 4 つの弧状連結成分をもっている．

§7. 反射行列

$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．$\boldsymbol{a} \in S_K{}^{n-1}$ に対して，$\boldsymbol{a}$ に関する反射行列 $D \in G(n, K)$ を定義しよう．本節の目的を反射行列と直交群 $O(n)$ の関係を示す定理 24, 25 を証明することにおくので $K = \boldsymbol{R}$ のときが重要である．$K = \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ のときへの拡張は 3 章 §3, 4 にある．

(1) 反射行列

定義　$\boldsymbol{a} \in S_K{}^{n-1}$ とする．$D = D_{\boldsymbol{a}} \in M(n, K)$ が 2 つの条件

(1)　$D\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$

(2)　$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0, \boldsymbol{x} \in K^n$　ならば　$D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

をみたすとき，D を **$\boldsymbol{a}$ に垂直な超平面に関する反射行列**（または**鏡映行列**）略して **$\boldsymbol{a}$ に関する反射行列**という．

補題 103.　$D = D_{\boldsymbol{a}} \in M(n, K)$ を $\boldsymbol{a} \in S_K{}^{n-1}$ に関する反射行列とするとき，つぎの (1), (2), (3) がなりたつ．

(1)　$D \in G(n, K)$

(2)　$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ のとき，D は固有値 $-1, 1$（1 は $n-1$ 重根）をもつ．とくに $\det D = -1$ である．

(3)　$AD_{\boldsymbol{a}}A^{-1} = D_{A\boldsymbol{a}}$,　　$A \in G(n, K)$

証明　(1)　任意の $\boldsymbol{y} \in K^n$ は $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}\lambda + \boldsymbol{x}, \lambda \in K, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0$ と表わされる．このとき，$\|D\boldsymbol{y}\|^2 = \|D(\boldsymbol{a}\lambda + \boldsymbol{x})\|^2 = \|(D\boldsymbol{a})\lambda + D\boldsymbol{x}\|^2 = \|-\boldsymbol{a}\lambda + \boldsymbol{x}\|^2$（$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0$ であるから）$= \|\boldsymbol{a}\lambda + \boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{y}\|^2$ となる．よって $D \in G(n, K)$ である（補題 16）．

(2)　$\boldsymbol{a}$ を含む K^n の（正規）直交基 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ をとり（補題 14）行列 $A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ をつくると $A^{-1}DA = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ となる．実際，$A^{-1}DA\boldsymbol{e}_1 = A^{-1}D\boldsymbol{a} = A^{-1}(-\boldsymbol{a}) = -A^{-1}\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{e}_1$, $A^{-1}DA\boldsymbol{e}_i = A^{-1}D\boldsymbol{x}_i = A^{-1}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{e}_i$ $(i = 2, \cdots, n)$ となるか

らである．D と $A^{-1}DA$ の固有値は等しいから (2) が証明された．

(3) $(ADA^{-1})(A\boldsymbol{a}) = AD\boldsymbol{a} = A(-\boldsymbol{a}) = -A\boldsymbol{a}$ である．また $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{a}) = 0$, $\boldsymbol{x} \in K^n$ ならば $(A^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = (A^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{a}) = 0$ であるから $(ADA^{-1})\boldsymbol{x} = A(D(A^{-1}\boldsymbol{x})) = AA^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ となる．よって $ADA^{-1} = D_{A\boldsymbol{a}}$ である．

補題 104. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in S_K{}^{n-1}$ とする．$\boldsymbol{a}$ に関する反射行列 D は

$$D = \left(\delta_{ij} - 2a_i\bar{a}_j\right)_{i,j=1,\cdots,n}$$

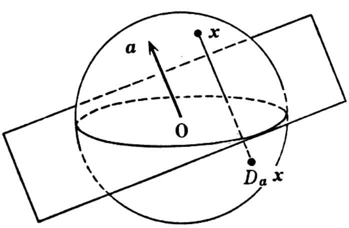
で与えられる．逆にこのような行列 D は $\boldsymbol{a}$ または $-\boldsymbol{a}$ の反射行列である．

証明 $\boldsymbol{e}_j$ は $\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{a}\bar{a}_j + \boldsymbol{x}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0$ と表わされる．実際，$\boldsymbol{e}_j$ は $\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{a}\lambda + \boldsymbol{x}$, $\lambda \in K$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0$ と表わされるが，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\lambda + \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})\lambda + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{a}\|^2\lambda + 0 = \lambda$ であり，一方 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_j) = (\sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_i a_i, \boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \bar{a}_j$ であるから，$\lambda = \bar{a}_j$ である．さて，$D\boldsymbol{e}_j = D(\boldsymbol{a}\bar{a}_j + \boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{a}\bar{a}_j + \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}\bar{a}_j + \boldsymbol{x}) - 2\boldsymbol{a}\bar{a}_j = \boldsymbol{e}_j - 2\boldsymbol{a}\bar{a}_j = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_i\delta_{ij} - 2\sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_i a_i\bar{a}_j = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_i(\delta_{ij} - 2a_i\bar{a}_j)$ であるから $D = \left(\delta_{ij} - 2a_i\bar{a}_j\right)$ である．逆に $D = \left(\delta_{ij} - 2a_i\bar{a}_j\right)$ のとき，任意の $\boldsymbol{y} \in K^n$ に対して

$$D\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y})$$

であることが実際の計算によって容易に確かめられる．ゆえに $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}$ のとき $D\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}) = 0$ ならば $D\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$ となる．

例 122. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in S^2$ に関する反射行列 $D \in O(3)$ の幾何学的意味を考えてみよう．空間 $\boldsymbol{R}^3$ において，原点を通りベクトル $\boldsymbol{a}$ に垂直な平面の方程式は $ax + by + cz = 0$ であり，この平面へ点 $\boldsymbol{e}_1$ より下した垂線の方程式は



$$\frac{x-1}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} (= k)$$

で与えられる．この直線が再び球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ と交わる点を求めるために，$x = 1 + ak$, $y = bk$, $z = ck$ を $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ に代入して

$$(1 + ak)^2 + (bk)^2 + (ck)^2 = 1$$

$$(a^2+b^2+c^2)k^2+2ak=0$$

を得る. $a^2+b^2+c^2=1$ であるから, $k^2+2ak=0$ となる. ゆえに $k\neq 0$ とすると $k=-2a$ となる. よって交点は $\begin{pmatrix}1-2a^2\\ -2ba\\ -2ca\end{pmatrix}$ である. 同様に点 $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ から平面 $ax+by+cz=0$ に下した垂線が再び球面 S^2 と交わる点はそれぞれ $\begin{pmatrix}-2ab\\ 1-2b^2\\ -2cb\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2ac\\ -2bc\\ 1-2c^2\end{pmatrix}$ である. この 3 つのベクトルを各列にもつ行列が $D_{\boldsymbol{a}}$ である.

補題 105. $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in S^{n-1}$ が $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{e}_n$ であるならば

$$\begin{pmatrix}-2x_1x_n\\ \vdots\\ -2x_{n-1}x_n\\ 1-2x_nx_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_{n-1}\\ a_n\end{pmatrix}$$

をみたす $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in S^{n-1}$ が存在する. さらに $x_n>0$ を仮定すると $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}$ に対して1意に定まる.

証 明 $x_n>0$ と仮定すると, $1-2x_n{}^2=a_n$ より $x_n=\dfrac{\sqrt{1-a_n}}{\sqrt{2}}$ を得る. さらに $-2x_kx_n=a_k$ より $x_k=-\dfrac{a_k}{2x_n}=-\dfrac{a_k}{\sqrt{2(1-a_n)}}$, $k=1,\cdots,n-1$ を得る.

定 理 24. 直交群 $O(n)$ は反射行列により生成される. すなわち直交行列 $A\in O(n)$ に対して有限個の反射行列 $D_1,\cdots,D_m$ が存在して, A はその積で表わされる : $A=D_1,\cdots,D_m$.

また回転 $A\in SO(n)$ は偶数個の反射行列 $D_1,\cdots,D_{2m}$ の積で表わされる : $A=D_1\cdots D_{2m}$.

証 明 $A\in O(k-1)$ を $\begin{pmatrix}A & \\ & 1\end{pmatrix}\in O(k)$ と同一視することにより $O(k-1)$ を $O(k)$ の部分群とみなしておく (104 頁) :

$$O(1)\subset O(2)\subset\cdots\subset O(n-1)\subset O(n)$$

さて n に関する帰納法により定理を証明しよう. $n=1$ のとき $O(1)=\{-1,1\}$ である. $-1\in O(1)$ は $1\in S^0$ の反射行列でありかつ $1\in O(1)$ は $1=(-1)(-1)$ と表わされるから $O(1)$ の元は反射行列の有限個の積で表わせる. $O(n-1)$ においては定理がなりたつと仮定して, $A=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\in O(n)$ としよう. $A\in O(n-1)$ ならばすでに A に

対して定理がなりたつと仮定したから，$A \notin O(n-1)$，すなわち $\boldsymbol{a}_n \neq \boldsymbol{e}_n$ であるとしておいてよい．さて $\boldsymbol{a}_n$ に対して補題105の $\boldsymbol{x}$ をとり，$\boldsymbol{x}$ に関する反射行列 D をつくると，$D^{-1}A = {}^tDA = \begin{pmatrix} B & \\ & 1 \end{pmatrix}$ となる．したがって $A = DB$, $B \in O(n-1)$ と表わされる．しかるに帰納法の仮定により，B は有限個の反射行列の積：$B = D_2 \cdots D_m$ で表わされるので $A = DD_2 \cdots D_m$ と表わせる．つぎに $A \in SO(n)$ を反射行列の積：$A = D_1D_2 \cdots D_m$ と表わすとき，$\det D_k = -1$（補題103 (2)），$k = 1, \cdots, m$ であるから，$\det A = 1$ ならば m は偶数でなければならない．以上で定理が証明された．

(2) 射影空間の古典群への埋め込み

反射行列 D は $G(n, K)$ の元であった（補題103 (1)）が反射行列 D は本質的に射影空間 $KP(n-1)$ の点にほかならないのである．この事実をつぎの定理が示している．

定理 25. （1） $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．写像 $f: KP(n-1) \to G(n, K)$

$$f(X) = E - 2X$$

は単射同相写像である．したがって $KP(n-1)$ とその f による像 $f(KP(n-1))$ を同一視すると埋め込み

$$\boldsymbol{R}P(n-1) \subset O(n), \qquad \boldsymbol{C}P(n-1) \subset U(n), \qquad \boldsymbol{H}P(n-1) \subset Sp(n)$$

を得る．

（2） $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とする．写像 $g: KP(n-1) \to SG(n, K)$

$$g(X) = (E - 2X)\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

は単射同相写像である．したがって $KP(n-1)$ とその g による像 $g(KP(n-1))$ を同一視すると埋め込み

$$\boldsymbol{R}P(n-1) \subset SO(n), \qquad \boldsymbol{C}P(n-1) \subset SU(n)$$

を得る．

証明 （1） $X \in KP(n-1)$ ならば $(E-2X)(E-2X)^* = (E-2X)^2 = E - 4X + 4X^2 = E - 4X + 4X = E$, よって $E - 2X \in G(n, K)$ である．明らかに f は連続な単射である．しかるに $KP(n-1)$ はコンパクトであり（定理14） $G(n, K)$ は Hausdorff 空間であるから，f は単射同相写像である（命題51）．

（2） $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ のとき $X \in KP(n-1)$ に対して $\det(E-2X) = -1$ である．実際，$X \in KP(n-1)$ は，ある $A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \in G(n, K)$ により $X = AE_nA^*$ と表

わされる（補題 27）．このとき $E-2X$ は $\boldsymbol{a}_n$ に関する反射行列 $D_{\boldsymbol{a}_n}$ にほかならない（補題 104）．したがって $\det(E-2X)=\det(D_{\boldsymbol{a}_n})=-1$（補題 103 (2)）である．ゆえに $\det(g(X))=1$，すなわち $g(X)\in SG(n, K)$ である．さて g が連続な単射であることは明らかであるので，(1) と同様にすると，$KP(n-1)$ がコンパクトであることと $SG(n)$ が Hausdorff 空間であることから g が単射同相写像であることが導かれる．

注意 $\boldsymbol{R}P(n-1)\subset O(n)$, $\boldsymbol{R}P(n-1)\subset SO(n)$ は $O(n)$, $SO(n)$ の位相構造を調べるのに重要である（3 章 §3）が，$\boldsymbol{C}P(n-1)\subset U(n)$, $\boldsymbol{C}P(n-1)\subset SU(n)$, $\boldsymbol{H}P(n-1)\subset Sp(n)$ はこのままの形では $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ の位相構造を調べるのに（余り）役立たない（3 章 §4,5 参照）．

例 123. 定理 25 の $\boldsymbol{R}P(n-1)\subset O(n)$, $\boldsymbol{R}P(n-1)\subset SO(n)$ を $n=2$ のときに調べてみよう．$X\in \boldsymbol{R}P(1)$ は

$$X=\begin{pmatrix}\xi & x\\ x & 1-\xi\end{pmatrix},\qquad \xi(1-\xi)=x^2,\ \xi,\ x\in\boldsymbol{R}$$

と表わせる（57 頁）．$\left(\xi-\dfrac{1}{2}\right)^2+x^2=\dfrac{1}{2^2}$ であるから $\xi=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\theta$, $x=\dfrac{1}{2}\sin\theta$ とおくと

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}$$

の形である．したがって，

$$E-2X=\begin{pmatrix}-\cos\theta & -\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\in O(2)$$

$$(E-2X)\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\in SO(2)$$

である．$SO(2)$ の任意の元は上式の右辺の形に表わされる（例 51）ので

$$\boldsymbol{R}P(1)=SO(2)$$

である．勿論 $\boldsymbol{R}P(1)=SO(2)$ の等号は $g:\boldsymbol{R}P(1)\to SO(2)$, $g(X)=(E-2X)\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ が同相写像であるという意味である．

§8. 体の自己同型群

$SO(1)=\{1\}$, $SO(2)\cong S^1$ であった（例 51）が，この節で $SO(3)\simeq \boldsymbol{R}P(3)$ であることを示そう．

定義 $K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}, \mathfrak{C}$ とする．写像 $\alpha: K\to K$ が任意の $x, y\in K$, $\lambda\in\boldsymbol{R}$ に対して

（1）　$\alpha(x+y)=\alpha(x)+\alpha(y)$

（2）　$\alpha(\lambda x)=\lambda\alpha(x)$

（3）　$\alpha(xy)=\alpha(x)\alpha(y)$

（4）　α は全単射である†

をみたすとき，α を体 K の **自己同型写像** という．体 K の自己同型写像全体の集合は（写像の合成の積により）群をつくっている．この群を体 K の **自己同型群** といい，$Aut(K)$ で表わす．

まず $\alpha\in Aut(K)$ ならば $\alpha(1)=1$ であることに注意しておこう．実際，(3) において $x=y=1$ とおくと $\alpha(1)=\alpha(1)\alpha(1)$ となるが，(4) より $\alpha(1)\neq 0$ がわかるので $\alpha(1)^{-1}$ を両辺に掛けて $1=\alpha(1)$ を得る．

例 124.　$Aut(\boldsymbol{R})=\{1\}$，すなわち体 $\boldsymbol{R}$ の自己同型写像は恒等写像 $1:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $1(x)=x$ 以外には存在しない．実際，$\alpha\in Aut(\boldsymbol{R})$ とすると $\alpha(x)=\alpha(x1)=x\alpha(1)=x1=x$ $(x\in\boldsymbol{R})$ となるから $\alpha=1$ である．

例 125.　$Aut(\boldsymbol{C})\cong S^0$ である．実際，写像 $1, \alpha:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ をそれぞれ $1(x)=x$, $\alpha(x)=\bar{x}$ と定義すると，$1, \alpha$ は明らかに体 $\boldsymbol{C}$ の自己同型写像である．逆に $\beta\in Aut(\boldsymbol{C})$ とするとき，$\beta(i)\beta(i)=\beta(ii)=\beta(-1)=-\beta(1)=-1$ となるから，$\beta(i)=i$ であるか $\beta(i)=-i$ のどちらかである．$\beta(i)=i$ のときには，$\beta(a+bi)=a\beta(1)+b\beta(i)=a+bi$ $(a, b\in\boldsymbol{R})$ であるから $\beta=1$ となる．$\beta(i)=-i$ のときには，$\beta(a+bi)=a\beta(1)+b\beta(i)=a-bi$ $(a, b\in\boldsymbol{R})$ であるから $\beta=\alpha$ となる．さて写像 $f: Aut(\boldsymbol{C})\to S^0=\{-1, 1\}$ を $f(1)=1$, $f(\alpha)=-1$ と定義すると f は群の同型写像である．したがって $Aut(\boldsymbol{C})$ と S^0 は群として同型である：$Aut(\boldsymbol{C})\cong S^0$．

4元数体 $\boldsymbol{H}$ の自己同型群 $Aut(\boldsymbol{H})$ を調べるためにつぎの補題から始めよう．

補題 106.　$O(4)$ を $\boldsymbol{H}$ における直交群とし：$O(4)=O(\boldsymbol{H})$, $O(3)$ を $1\in\boldsymbol{H}$ を不変にする $O(4)$ の部分群とする：$O(3)=\{\alpha\in O(\boldsymbol{H})\,|\,\alpha(1)=1\}$．このとき

$$Aut(\boldsymbol{H})\subset O(3)$$

がなりたつ．

証明　$\alpha\in Aut(\boldsymbol{H})$ とすると，$\alpha(i)\alpha(i)=\alpha(ii)=\alpha(-1)=-\alpha(1)=-1$ である．したがって $\overline{\alpha(i)}=-\alpha(i)$ となる．（一般に $x\in\boldsymbol{H}$ が $xx=-1$ であるとき，両辺の絶対

† α は (1), (2) の条件をもつので単射または全射の一方だけで十分である（補題 12）．

値をとると $|x|=1$ となる．よって $xx=-1$ の両辺に $\bar{x}$ を掛けると $x=-\bar{x}$ となる)．同様にして $\overline{\alpha(j)}=-\alpha(j)$, $\overline{\alpha(k)}=-\alpha(k)$ を得る．これらを用いると，一般の $x\in\boldsymbol{H}$ に対して $\overline{\alpha(x)}=\alpha(\bar{x})$ がなりたつことがわかる．実際，$x=a+bi+cj+dk$ $(a,b,c,d\in\boldsymbol{R})$ とするとき $\overline{\alpha(x)}=\overline{\alpha(a+bi+cj+dk)}=a+b\overline{\alpha(i)}+c\overline{\alpha(j)}+d\overline{\alpha(k)}=a-b\alpha(i)-c\alpha(j)-d\alpha(k)=\alpha(a-bi-cj-dk)=\alpha(\bar{x})$ である．さて任意の $x\in\boldsymbol{H}$ に対して $|\alpha(x)|^2=\overline{\alpha(x)}\alpha(x)=\alpha(\bar{x})\alpha(x)=\alpha(\bar{x}x)=\alpha(|x|^2)=|x|^2\alpha(1)=|x|^2$ がなりたつので $\alpha\in O(\boldsymbol{H})=O(4)$ である（補題16）．しかるに $\alpha(1)=1$ であったから $\alpha\in O(3)$ である．よって $Aut(\boldsymbol{H})\subset O(3)$ が証明された．さらに $Aut(\boldsymbol{H})$ は $O(3)$ の部分群であることに注意しておこう．

補題 107.

$$H_1=\{A\in SO(3)\,|\,A\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1\}$$
$$H_2=\{A\in SO(3)\,|\,A\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2\}$$

とおく（$H_1\cong SO(2)\cong H_2$ である）と，回転群 $SO(3)$ は H_1, H_2 より生成される．すなわち，$SO(3)$ の任意の行列 A は H_1 または H_2 に属する有限個の行列の積で表わされる．

証明 $A=(a_{ij})\in SO(3)$ とする．$a_{21}\neq 0$ ならば $\cot\theta=\dfrac{a_{31}}{a_{21}}$ となる θ をとり，$B_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\in H_1$ をつくると $B_1A=(b_{ij})$, $b_{21}=0$ となる．実際，$b_{21}=\cos\theta\, a_{21}-\sin\theta\, a_{31}=\cos\theta\, a_{21}-\sin\theta\, a_{21}\cot\theta=0$ である．($a_{21}=0$ ならば $B_1=E$ とする)．つぎに $b_{31}\neq 0$ ならば $\cot\varphi=-\dfrac{b_{11}}{b_{31}}$ となる φ をとり，$B_2=\begin{pmatrix}\cos\varphi&0&-\sin\varphi\\0&1&0\\\sin\varphi&0&\cos\varphi\end{pmatrix}\in H_2$ をつくると，$B_2B_1A=(c_{ij})$, $c_{21}=c_{31}=0$ となる．実際，$c_{21}=b_{21}=0$, $c_{31}=\sin\varphi\, b_{11}+\cos\varphi\, b_{31}=-\sin\varphi\, b_{31}\cot\varphi+\cos\varphi\, b_{31}=0$ である．($b_{31}=0$ ならば $B_2=E$ とする)．このとき $c_{11}=1$ または $c_{11}=-1$ であるが，$c_{11}=-1$ のときには $B_2'=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\pi&0&-\sin\pi\\0&1&0\\\sin\pi&0&\cos\pi\end{pmatrix}\in H_2$ をつくると，$B_2'B_2B_1A=(d_{ij})$, $d_{11}=1$, $d_{21}=d_{31}=0$ となる．($c_{11}=1$ のときは $B_2'=E$ とする)．すなわち $B_2'B_2B_1A=B_1'\in H_1$ である．よって $A=B_1^{-1}B_2^{-1}B_2'^{-1}B_1'$, $B_1^{-1}, B_1'\in H_1$, $B_2^{-1}, B_2'^{-1}\in H_2$ となり補題が証明された．

命題 108. 4元数体 $\boldsymbol{H}$ の自己同型写像 $\alpha\in Aut(\boldsymbol{H})$ はある $c\in\boldsymbol{H}$, $|c|=1$ を用いて

$$\alpha(x)=cxc^{-1}$$

と表わされる．また $SO(3)=\{\alpha\in SO(\boldsymbol{H})\,|\,\alpha(1)=1\}$ とすると

$$Aut(\boldsymbol{H}) = SO(3)$$

がなりたつ.

証 明　まず $SO(3) \subset Aut(\boldsymbol{H})$ を示そう. $H_i = \{\alpha \in SO(3) \mid \alpha(i) = i\}$, $H_j = \{\alpha \in SO(3) \mid \alpha(j) = j\}$ とおくと $SO(3)$ は H_i, H_j より生成される（補題107）ので, H_i, H_j の各元 α がある $c \in S_{\boldsymbol{H}}{}^0$ を用いて $\alpha(x) = cxc^{-1}$ と表わせることを証明するとよい. さて $c = e^{i\theta/2} = \cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)$ を用いて写像 $\alpha : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$, $\alpha(x) = cxc^{-1}$ をつくると $\alpha \in O(3)$ である（例65）が, さらに α が H_i の元であることをみるために, $\boldsymbol{H}_0 = \{x \in \boldsymbol{H} \mid \mathrm{Re}\, x = 0\}$ の基 i, j, k に関する α の行列を求めてみよう.

$$\alpha(i) = e^{i\theta/2} i e^{-i\theta/2} = i$$

$$\alpha(j) = e^{i\theta/2} j e^{-i\theta/2} = j e^{-i\theta/2} e^{-i\theta/2} = j e^{-i\theta} = j(\cos\theta - i\sin\theta) = j\cos\theta + k\sin\theta$$

$$\alpha(k) = e^{i\theta/2} k e^{-i\theta/2} = k e^{-i\theta/2} e^{-i\theta/2} = k e^{-i\theta} = k(\cos\theta - i\sin\theta) = -j\sin\theta + k\cos\theta$$

であるから α の行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である. これより $\det\alpha = 1$ がわかり $\alpha \in H_i$ となる. 逆にこの計算は H_i の任意の元 α がある $c = e^{i\theta/2}$ を用いて $\alpha(x) = cxc^{-1}$ と表わさることも示している. 同様に H_j の任意の元 α もある $c = e^{j\theta/2} = \cos(\theta/2) + j\sin(\theta/2)$ を用いて $\alpha(x) = cxc^{-1}$ と表わせることがわかる. 以上で

$$SO(3) \subset Aut(\boldsymbol{H})$$

が証明された. すでに $Aut(\boldsymbol{H}) \subset O(3)$ を示した（補題106）ので $Aut(\boldsymbol{H}) \subset SO(3)$ を示すためには, $\alpha \in Aut(\boldsymbol{H})$ が $\det\alpha = -1$ であるとして矛盾を出すとよい. さて $\alpha \in Aut(\boldsymbol{H})$ が $\det\alpha = -1$ とするとき

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\beta, \qquad \beta \in SO(3) \subset Aut(\boldsymbol{H})$$

と表わすならば, $\gamma = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \alpha\beta^{-1} \in Aut(\boldsymbol{H})$ となる. すなわち, この γ は, $\gamma(i) = -i$, $\gamma(j) = j$, $\gamma(k) = k$ をみたしているが, このとき $k = ij = -\gamma(i)\gamma(j) = -\gamma(ij) = -\gamma(k) = -k$ となり矛盾である. 以上で

$$SO(3) = Aut(\boldsymbol{H})$$

が証明された．さらに上記の証明は同時に，任意の $\alpha \in Aut(\boldsymbol{H})$ がある $c \in S_{\boldsymbol{H}}{}^0$ により $\alpha(x) = cxc^{-1}$ と表わされることをも示している．

定理 26. 3次の回転群 $SO(3)$ は3次元実射影空間 $\boldsymbol{R}P_3$ と同相である：

$$SO(3) \simeq \boldsymbol{R}P_3$$

証明 $S^3 = \{x \in \boldsymbol{H} \mid |x| = 1\}$, $SO(3) = Aut(\boldsymbol{H})$ とする．写像

$$f : S^3 \longrightarrow SO(3) = Aut(\boldsymbol{H})$$

$$f(c)x = cxc^{-1}, \qquad x \in \boldsymbol{H}$$

は明らかに連続な準同型写像である．命題108の前半は f が全射であることを示している．f の核は $S^0 = \{-1, 1\}$ である．実際，$c \in S^3$ が $f(c) = 1$ であれば，$cxc^{-1} = x$，すなわち $cx = xc$ がすべての $x \in \boldsymbol{H}$ に対してなりたつ．これより $c \in \boldsymbol{R}$ がわかり（例48），さらに $|c| = 1$ より $c = 1$ または $c = -1$ となる．さて S^3 はコンパクト群であり（定理7, $S^3 = Sp(1)$），$SO(3)$ は Hausdorff 群であるから準同型定理（命題79）より S^3/S^0 と $SO(3)$ は位相群として同型である：$S^3/S^0 \cong SO(3)$．しかるに S^3/S^0 は S^3 において2点 c と $-c$ を同一視した空間であるから $\boldsymbol{R}P_3$ にほかならない（定理13または定理19）．よって $SO(3)$ は $\boldsymbol{R}P_3$ に同相である．

$Aut(\mathfrak{C})$ を G_2 で表わす．この群 G_2 は Lie 群論で非常に重要な群であるがここでは触れない．付録（4）で少し述べておいた．

3 射影空間と古典群の胞体分割

射影空間と古典群の胞体分割を与えることを目的とする．さきに古典群が射影空間の推移的位相変換群である（定理 16）ことを示したが，さらに射影空間が古典群と別の意味において密接に関係していることがこの章で明らかになる．

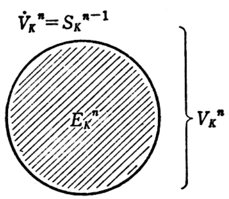
§1. 胞　複　体

$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．まず記号を整理しておこう．自然数 $n\geqq 1$ に対して

$$V_K{}^n=\{\boldsymbol{x}\in K^n\,|\,\|\boldsymbol{x}\|\leqq 1\}$$

$$E_K{}^n=\{\boldsymbol{x}\in K^n\,|\,\|\boldsymbol{x}\|<1\}$$

$$\dot{V}_K{}^n=S_K{}^{n-1}=\{\boldsymbol{x}\in K^n\,|\,\|\boldsymbol{x}\|=1\}$$



とおく．明らかに $E_K{}^n\cup S_K{}^{n-1}=V_K{}^n$, $E_K{}^n\cap S_K{}^{n-1}=\phi$ である．さらに $V_K{}^0=\{0\}$, $E_K{}^0=S_K{}^{-1}=\phi$ と約束しておく．また $V_R{}^n$, $E_R{}^n$, $\dot{V}_R{}^n=S_R{}^{n-1}$ を単にそれぞれ V^n, E^n, $\dot{V}^n=S^{n-1}$ で表わすことにする．

V^n を **n 次元単位閉胞体**という．さらに V^n に同相な位相空間も n 次元単位閉胞体ということにする．$\boldsymbol{C}^n$ と $\boldsymbol{R}^{2n}$ および $\boldsymbol{H}^n$ と $\boldsymbol{R}^{4n}$ はそれぞれつぎの写像 $f_C:\boldsymbol{C}^n\to\boldsymbol{R}^{2n}$, $f_H:\boldsymbol{H}^n\to\boldsymbol{R}^{4n}$

$$f_C((x_1+iy_1,\cdots,x_n+iy_n))=(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n)$$

$$f_H(x_1+iy_1+jz_1+kt_1,\cdots,x_n+iy_n+jz_n+kt_n))$$
$$=(x_1,y_1,z_1,t_1,\cdots,x_n,y_n,z_n,t_n)$$

により同相であった（47 頁，命題 28）が，この写像 f_C, f_H はさらにつぎの空間の同相を誘導していることに注意しておこう．

$$V_C{}^n\simeq V^{2n}\qquad\qquad V_H{}^n\simeq V^{4n}$$

$$E_C{}^n\simeq E^{2n}\qquad\qquad E_H{}^n\simeq E^{4n}$$

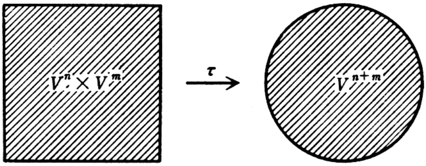
$$\dot{V}_C{}^n=S_C{}^{n-1}\simeq S^{2n-1}=\dot{V}^{2n}\qquad \dot{V}_H{}^n=S_H{}^{n-1}\simeq S^{4n-1}=\dot{V}^{4n}$$

とくに，$V_C{}^n$, $V_H{}^n$ はそれぞれ $2n$, $4n$ 次元単位閉胞体である．

また写像 $\tau : V^n \times V^m \to V^{n+m}$ を

$$\tau(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\lambda \boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{y}), \qquad \lambda = \max\{|\boldsymbol{x}|, |\boldsymbol{y}|\}/\sqrt{|\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2}$$

と定義すると τ が同相写像であることが容易に確かめられる．したがって $V^n \times V^m$ も $n+m$ 次元単位閉胞体である．なお $V^n \times V^m$ の部分集合 $S^{n-1} \times V^m \cup V^n \times S^{m-1}$ は τ により S^{n+m-1} に同相に写像されていることに注意しておこう．すなわち



$$(V^n \times V^m)^{\cdot} = \dot{V}^n \times V^m \cup V^n \times \dot{V}^m$$

である．

X を位相空間とする．X の部分集合 e に対して，同相写像 $\varphi : E^n \to e$ を誘導するような連続写像 $\varphi : V^n \to X$ が在存するとき，e を X の **n 次元胞体**といい，φ を e の**特性写像**という．e の次元が n であることを明示したいときには，e を e^n とかくことが多い．とくに X の 0 次元胞体は X の点のことである．

定義　X を位相空間とする．X の胞体の集合 e_λ, $\lambda \in \Lambda$ がつぎの 3 つの条件

（1）　$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$

（2）　$\lambda \neq \mu$　ならば　$e_\lambda \cap e_\mu = \phi$

（3）　各胞体 e^n の特性写像 $\varphi : V^n \to X$ は

$$\varphi(\dot{V}^n) \subset X^{n-1}$$

をみたしている．ここに X^{n-1} は X の $n-1$ 次元以下の胞体全体の和集合とする：

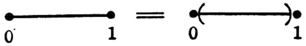
$$X^{n-1} = \bigcup_{k \leqq n-1} e^k$$

をみたすとき，X の**胞体分割**が与えられたという．または X は胞体 e_λ, $\lambda \in \Lambda$ をもつ**胞複体**であるといい，$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$ で表わす．

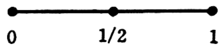
$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$ を胞複体とする．部分集合 $M \subset \Lambda$ に対して $A = \bigcup_{\mu \in M} e_\mu$ が再び胞複体になっているとき（すなわち各 $\mu \in M$ に対して，e_μ の特性写像 $\varphi : V^n \to X$ が $\varphi(V^n) \subset A$ をみたしていること），A を X の**部分複体**という．

例 126.　I を閉区間 $[0, 1]$ とする．$e_0{}^0 = \{0\}$, $e_1{}^0 = \{1\}$, $e^1 = (0, 1)$ とおく．写像 $\varphi : V^1 = [-1, 1] \to I$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)$ は明らかに $E^1 = (-1, 1)$ を e^1 に同相に写像

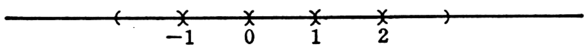
しているので，φ は e^1 の特性写像を与えている．かつ，$e_0{}^0$, $e_1{}^0$, e^1 はたがいに共通部分がなくて，その和集合が I である．さらに $\varphi(\dot{V}^1)=\{0, 1\}=e_0{}^0\cup e_1{}^0$ であるから，I は2つの0次元胞体 $e_0{}^0$, $e_1{}^0$ と1次元胞体 e^1 をもつ胞複体である：$I=e_0{}^0\cup e_1{}^0\cup e^1$.



閉区間 I の1つの胞体分割 $I=e_0{}^0\cup e_1{}^0\cup e^1$ を与えたが，I の胞体分割の仕方はこのほかにもいろいろある．たとえば右図のように3つの0次元胞体 $e_0{}^0=\{0\}$, $e_{1/2}{}^0=\{1/2\}$, $e_1{}^0=\{1\}$ と2つの1次元胞体 $e_1{}^1=(0, 1/2)$, $e_2{}^1=(1/2, 1)$ をもつ胞複体にも分割される．したがって与えられた位相空間 X が胞体 e_λ, $\lambda\in\Lambda$ をもつ胞複体であるというよりも，X は胞体 e_λ, $\lambda\in\Lambda$ をもつ胞複体に分割できるというほうが正しいのであるが，本書では前者のようないい方をすることにした.



例 127. $\boldsymbol{R}$ において，$e_n{}^0=\{n\}$, $e_n{}^1=$ 開区間 $(n, n+1)$, $n=0, \pm1, \pm2\cdots$ とおく．写像 $\varphi_n: V^1\to\boldsymbol{R}$, $\varphi_n(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)+n$ は胞体 $e_n{}^1$ の特性写像を与えており，かつ $\varphi_n(\dot{V}^1)=\{n, n+1\}=e_n{}^0\cup e_{n+1}{}^0$ であるから $\boldsymbol{R}$ は $e_n{}^0$, $e_n{}^1$, $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$ からなる胞複体である：$\boldsymbol{R}=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}e_n{}^0\cup\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}e_n{}^1$.



なお，例126の胞複体 $I=e_0{}^0\cup e_1{}^0\cup e^1$ はこの胞複体 $\boldsymbol{R}$ の部分複体になっている.

補題 109. 胞複体 $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}e_\lambda$ が Hausdorff 空間であるとする．このとき X の各胞体 e に対して，その特性写像を $\varphi: V^n\to X$ とすると

$$\varphi(V^n)=\bar{e}$$

がなりたつ.

証明 $\overline{E^n}=V^n$, $\varphi(E^n)=e$ であるから，φ が連続であることを用いると $\varphi(V^n)=\varphi(\overline{E^n})\subset\overline{\varphi(E^n)}$（補題44）$=\bar{e}$ がわかる．一方，V^n はコンパクトである（例79）から，その連続像 $\varphi(V^n)$ もまたコンパクトである（命題49）．これに X が Hausdorff 空間であることを用いると $\varphi(V^n)$ が X の閉集合である（補題48 (2)）ことがでわかる．したがって，$e=\varphi(E^n)\subset\varphi(V^n)$ に閉包をとると，$\bar{e}\subset\overline{\varphi(V^n)}=\varphi(V^n)$ を得る．よって初めの結果とあわせると $\varphi(V^n)=\bar{e}$ となる.

この補題109の $\varphi(V^n)=\bar{e}$ の性質を必要とすることが多いため，胞複体 X には Hausdorff 空間であるという仮定をおく場合が多い.

例 126 のように胞体の数が有限個である胞複体を**有限胞複体**または**有限 CW 複体**という（補題 110 参照）. ここでいう **CW 複体** X とはつぎの 2 つの条件（C）（W）をみたす胞複体のことである.

（C）　X の各胞体 e に対して，e を含む X の有限部分複体が存在する.

（W）　X の部分集合 O に対して，

$$O \text{ が } X \text{ の開集合} \iff X \text{ の各胞体 } e \text{ に対して } O \cap \bar{e} \text{ が } \bar{e} \text{ の開集合}$$

がなりたつ.

CW 複体 X の条件（W）をつぎの条件（W'）におきかえてよいことはすぐわかる.

（W'）　X の部分集合 F に対して

$$F \text{ が } X \text{ の閉集合} \iff X \text{ の各胞体 } e \text{ に対して，} F \cap \bar{e} \text{ が } \bar{e} \text{ の閉集合}$$

がなりたつ.

例 128.　X を位相空間とする. X の各点を 0 次元胞体と考えると，X の 1 つの胞体分割ができる. しかし X のこの胞体分割はほとんど意味がない. それはこの胞複体 X は（一般には）CW 複体でないからである.

補題 110.　有限胞複体 X は CW 複体である.

証明　有限胞複体ならば，CW 複体の（C）の条件は明らかになりたっている.（W）の条件を確かめよう. F を X の閉集合とするとき，$F \cap \bar{e}$ が $\bar{e}$ の閉集合であることは明らかである. 逆に X の部分集合 F が X の各胞体 e に対し $F \cap \bar{e}$ が $\bar{e}$ の閉集合であるとすると（このとき $F \cap \bar{e}$ は X の閉集合でもある）$F = F \cap X = F \cap \bigcup_{\lambda} \bar{e}_{\lambda} = \bigcup_{\lambda} (F \cap \bar{e}_{\lambda})$ であるから，F は閉集合 $F \cap \bar{e}_{\lambda}$ の有限個の和集合として閉集合である.

補題 111.　Hausdorff 空間である有限胞複体 X の最高次元の胞体 e^n はいずれも X の開集合である.

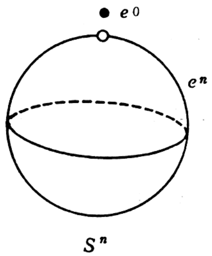
証明　有限胞複体 X は CW 複体である（補題 110）から，X の各胞体 e に対して $e^n \cap \bar{e}$ が $\bar{e}$ の開集合であることをいうとよい. さて e の特性写像を $\varphi : V^m \to X$ とするとき，$\bar{e} = \varphi(V^m) = \varphi(E^m) \cup \varphi(\dot{V}^m) = e \cup \varphi(\dot{V}^m)$ であるから，$\bar{e}$ は e と e より低い次元の胞体の和集合に含まれる. ゆえに $e^n \cap \bar{e} = e^n$（$e^n = e$ のとき）であるか $e^n \cap \bar{e} = \phi$（$e^n \neq e$ のとき）のどちらかである. しかるに $e^n = e$ のとき，$e = \varphi(E^n) = \varphi(V^n) - \varphi(\dot{V}^n) = \bar{e} - \varphi(\dot{V}^n) = \bar{e} \cap (X - \varphi(\dot{V}^n))$ であるから，$e = \bar{e} \cap e$ は $\bar{e}$ の開集合であり（$\varphi(\dot{V}^n)$ は X の閉集合であることに注意），また $e^n \cap \bar{e} = \phi$ のときは当然 $e^n \cap \bar{e}$ は $\bar{e}$ の開集合であるから，e^n が X の開集合であることが証明された.

§2. 射影空間の胞体

球面と射影空間の胞体分割を与えよう．この節の直観的な考え方が例 13, 15, 17 である．

(1) 球面の胞体分割

定理 27. n 次元球面 S^n は 0 次元胞体 e^0 と n 次元胞体 e^n からなる有限 CW 複体である．



$$S^n = e^0 \cup e^n$$

証明 $e^0 = \boldsymbol{e}_{n+1}$, $e^n = S^n - e^0$ とおく．写像 $\varphi: V^n \to S^n$ を $\varphi(\boldsymbol{x}) = (-2\boldsymbol{x}\sqrt{1-\|\boldsymbol{x}\|^2}, 2\|\boldsymbol{x}\|^2 - 1)$ と定義すると φ は連続であり，かつ φ は同相写像 $\varphi: E^n \to e^n$ を誘導している．実際，写像 $\psi: e^n \to E^n$ を $\psi(\boldsymbol{b}, b) = -\dfrac{\boldsymbol{b}}{\sqrt{2(1-b)}}$ ($\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^{n-1}$, $b \in \boldsymbol{R}$, $\|\boldsymbol{b}\|^2 + b^2 = 1$) と定義するとき，$\psi$ も連続写像であり $\psi\varphi = 1$, $\varphi\psi = 1$ をみたしているからである．さらに $\varphi(\dot{V}^n) = \boldsymbol{e}_{n+1} = e^0$ であるから，S^n は 2 つの胞体 e^0, e^n をもつ胞複体に分割された．

この定理 27 の証明に用いた写像 φ は V^n において $\dot{V}^n = S^{n-1}$ を 1 点に縮める写像である（例 104）.

(2) 射影平面の胞体分割

$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}, \mathfrak{C}$; $d = 1, 2, 4, 8$ とする．

定理 28. 射影直線 $KP(1)$ は d 次元球面 S_d と同相である．

$$\boldsymbol{R}P(1) \simeq S_1, \quad \boldsymbol{C}P(1) \simeq S_2, \quad \boldsymbol{H}P(1) \simeq S_4, \quad \mathfrak{C}P(1) \simeq S_8$$

したがって $KP(1)$ は 0 次元胞体 e^0 と d 次元胞体 e^d をもつ有限 CW 複体である．

$$\boldsymbol{R}P(1) = e^0 \cup e^1$$
$$\boldsymbol{C}P(1) = e^0 \cup e^2$$
$$\boldsymbol{H}P(1) = e^0 \cup e^4$$
$$\mathfrak{C}P(1) = e^0 \cup e^8$$

証明 写像 $f: S_d \to KP(1)$, $f(\xi, x) = \begin{pmatrix} \xi & \bar{x} \\ x & 1-\xi \end{pmatrix}$ (58 頁) は同相写像であるから $S_d \simeq KP(1)$ である．さらに S_d は d 次元単位球面 S^d と同相である（58 頁欄外）から $KP(1)$ は球面 S^d と同相である．S^d は 0 次元胞体 e^0 と d 次元胞体 e^d をもつ胞複体である（定理 27）から $KP(1)$ もそうである．

写像 $j: KP(1) \to KP(2)$ を $j(X) = \begin{pmatrix} X & \\ & 0 \end{pmatrix}$ と定義すると j は単射同相写像である

から，$X \in KP(1)$ と $\begin{pmatrix} X & \\ & 0 \end{pmatrix} \in KP(2)$ を同一視することにより $KP(1)$ を $KP(2)$ の部分空間とみなしておく．

定理 29. 射影平面 $KP(2)$ は 0 次元胞体 e^0 と d 次元胞体 e^d と $2d$ 次元胞体 e^{2d} からなる有限 CW 複体である．

$$\boldsymbol{R}P(2) = e^0 \cup e^1 \cup e^2$$
$$\boldsymbol{C}P(2) = e^0 \cup e^2 \cup e^4$$
$$\boldsymbol{H}P(2) = e^0 \cup e^4 \cup e^8$$
$$\mathfrak{C}P(2) = e^0 \cup e^8 \cup e^{16}$$

さらに $KP(1)$ は $KP(2)$ の部分複体である．

証明
$$e^0 = E_1 = KP(0) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad e^d = KP(1) - e^0, \quad e^{2d} = KP(2) - KP(1)$$
$= KP(2) - e^0 - e^d$ とおく．e^d, e^{2d} の特性写像 φ_1, φ_2 を与えよう．写像 $\varphi_1 : V_K{}^1 \to KP(1) \subset KP(2)$ を

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} |x|^2 & x\sqrt{1-|x|^2} & 0 \\ \sqrt{1-|x|^2}\,\bar{x} & 1-|x|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義すると，φ_1 は同相写像 $\varphi_1 : E_K{}^1 \to e^d$ を誘導し，かつ $\varphi_1(S_K{}^0) = e^0$ である．($\varphi_1 : E_K{}^1 \to e^d$ が同相写像であることはつぎの φ_2 と同様にしてもよいが，定理 28 においてもすでに証明されている)．写像 $\varphi_2 : V_K{}^2 \to KP(2)$ を

$$\varphi_2(x, y) = \begin{pmatrix} |x|^2 & x\bar{y} & x\sqrt{1-|x|^2-|y|^2} \\ y\bar{x} & |y|^2 & y\sqrt{1-|x|^2-|y|^2} \\ \sqrt{1-|x|^2-|y|^2}\,\bar{x} & \sqrt{1-|x|^2-|y|^2}\,\bar{y} & 1-|x|^2-|y|^2 \end{pmatrix}$$

と定義するとき，φ_2 が同相写像 $\varphi_2 : E_K{}^2 \to e^{2d}$ を誘導していることを示そう．そのために写像 h, h', g, g' を

$$E_K{}^2 \underset{h'}{\overset{h}{\rightleftarrows}} K^2, \qquad K^2 \underset{g'}{\overset{g}{\rightleftarrows}} e^{2d}$$

$$\begin{cases} h(x, y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{1-|x|^2-|y|^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{1-|x|^2-|y|^2}} \right) \\ h'(s, t) = \left(\dfrac{s}{\sqrt{1+|s|^2+|t|^2}}, \dfrac{t}{\sqrt{1+|s|^2+|t|^2}} \right) \end{cases}$$

$$g(s,\ t)=\frac{1}{1+|s|^2+|t|^2}\begin{pmatrix}|s|^2 & s\bar{t} & s\\ t\bar{s} & |t|^2 & t\\ \bar{s} & \bar{t} & 1\end{pmatrix}$$

$$g'(X)=g'\begin{pmatrix}\xi_1 & x_3 & \bar{x}_2\\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix}=\left(\frac{\bar{x}_2}{\xi_3},\ \frac{x_1}{\xi_3}\right)$$

と定義する．($X\in e^{2d}$ とすると，$X\notin KP(1)$ より $\xi_3\neq 0$ であるから g' は定義されている)．$h,\ h'$；$g,\ g'$ はいずれも連続写像であり，かつ $h'h=1,\ hh'=1$；$g'g=1,\ gg'=1$ であることが容易に確かめられるので，$h,\ g$ は同相写像である．φ_2 は $E_K{}^2$ の上では gh と一致するから $\varphi_2: E_K{}^2\to e^{2d}$ は同相写像である．さらに $|x|^2+|y|^2=1$ のとき，$\varphi_2(x,\ y)=$ $\begin{pmatrix}|x|^2 & x\bar{y} & 0\\ y\bar{x} & |y|^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ であるから $\varphi_2(\dot{V}_K{}^2)\subset KP(1)=e^0\cup e^d$ である．($\varphi_2:\dot{V}_K{}^2=S_K{}^1\to KP(1)$ が全射であることが容易に確かめられるから実は $\varphi(\dot{V}_K{}^2)=KP(1)=e^0\cup e^d$ である)．以上で $KP(2)$ の胞体分割 $KP(2)=e^0\cup e^d\cup e^{2d}$ が得られた．この胞体分割の仕方においては，明らかに $KP(1)=e^0\cup e^d$ は $KP(2)=e^0\cup e^d\cup e^{2d}$ の部分複体になっている．

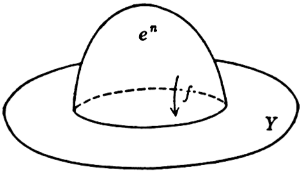
(3) Hopf の写像

$X,\ Y$ を2つの位相空間とし，かつ $X\cap Y=\phi$ とする．和集合 $X\cup Y$ の部分集合 O が $X\cup Y$ の開集合ではあるとは，$O=U\cup V$ (U は X の開集合，V は Y の開集合) と表わされるとき，またそのときに限ると定義する．このとき $X\cup Y$ の開集合全体の集合は $X\cup Y$ に位相を与える．この位相空間 $X\cup Y$ を X と Y の**位相和**(または**直和位相空間**)という．

定義　$X,\ Y$ を $X\cap Y=\phi$ をみたす位相空間とし，また X の閉集合 A と，連続写像 $f: A\to Y$ が与えられているとする．このとき位相和 $X\cup Y$ において，A の各点 a と Y の点 $f(a)$ は同値であると定義する．式でかくと，$X\cup Y$ において

$$p\sim p' \iff p=p' \text{ であるか } p\in A,\ f(p)=p' \text{ または } p'\in A,\ f(p')=p$$

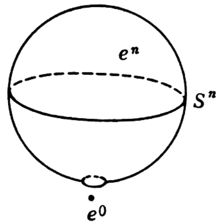
と定義すると関係 $\sim$ は同値法則をみたす．この関係 $\sim$ による $X\cup Y$ の等化空間 $(X\cup Y)/\sim$ を $Y\underset{f}{\cup}(X-A)$ で表わし，Y に X を写像 $f: A\to Y$ で**接着した空間**という．



接着空間で重要なのは $X=V^n,\ A=S^{n-1}(=\dot{V}^n)$ のときである．そして写像 $f: S^{n-1}\to Y$ による接着空間 $Y\underset{f}{\cup}(V^n-S^{n-1})$ を $Y\underset{f}{\cup}e^n$ で表わし，Y に写像

$f: S^{n-1} \to Y$ により n 次元胞体 e^n を接着した空間という.

例 129. 1点 e^0 に写像 $\varphi: S^{n-1} \to e^0$ により n 次元胞体 e^n を接着した空間 $e^0 \underset{\varphi}{\cup} e^n$ は n 次元球面 S^n に同相である.



つぎに（球面のホモトピー論で重要な）Hopf の写像を定義しよう.

定義 $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}, \mathfrak{C}$; $d = 1, 2, 4, 8$ とする. 写像 $\nu_K: S_K{}^1 \to S_d$ を

$$\nu_K(x, y) = (|x|^2, y\bar{x})$$

と定義し ν_K を **Hopf の 写像** という. Hopf の写像は

$$\nu_{\boldsymbol{R}}: S^1 \longrightarrow S_1, \qquad \nu_{\boldsymbol{C}}: S^3 \longrightarrow S_2$$

$$\nu_{\boldsymbol{H}}: S^7 \longrightarrow S_4, \qquad \nu_{\mathfrak{C}}: S^{15} \longrightarrow S_8$$

の4種類あるわけである.

例 130. 写像 $f: S_1 \to S^1$, $f(\xi, x) = (2\xi - 1, 2x)$ は同相写像である（58頁欄外）ので, S_1 をこの対応 f により S^1 と同一視して, Hopf の写像 $\nu_{\boldsymbol{R}}' = f\nu_{\boldsymbol{R}}: S^1 \to S^1$ を調べてみよう. S^1 の点 a を $(\cos\theta, \sin\theta)$ と表わすとき

$$\nu_{\boldsymbol{R}}'(\cos\theta, \sin\theta) = f\nu_{\boldsymbol{R}}(\cos\theta, \sin\theta) = f(\cos^2\theta, \sin\theta\cos\theta)$$

$$= (2\cos^2\theta - 1, 2\sin\theta\cos\theta) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$$

である. したがって点 a が S^1 を1周するとき, 点 $\nu_{\boldsymbol{R}}(a)$ は S^1 を同じ向きに2周する.

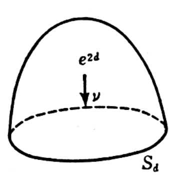
定理 30. $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}, \mathfrak{C}$; $d = 1, 2, 4, 8$ とする. 射影空間 $KP(2)$ は d 次元球面 S_d に Hopf の写像 $\nu = \nu_K: S_K{}^1 \to S_d$ により $2d$ 次元胞体 e^{2d} を接着した空間 $S_d \underset{\nu}{\cup} e^{2d}$ に同相である.

$$\boldsymbol{R}P(2) \simeq S_1 \underset{\nu}{\cup} e^2$$

$$\boldsymbol{C}P(2) \simeq S_2 \underset{\nu}{\cup} e^4$$

$$\boldsymbol{H}P(2) \simeq S_4 \underset{\nu}{\cup} e^8$$

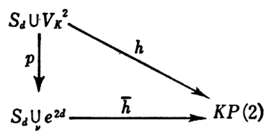
$$\mathfrak{C}P(2) \simeq S_8 \underset{\nu}{\cup} e^{16}$$



証明 写像 $h: S_d \cup V_K{}^2 \to KP(2)$ を

$$\begin{cases} h(\xi, x) = f(\xi, x), & (\xi, x) \in S_d \\ h(x, y) = \varphi_2(x, y), & (x, y) \in V_K{}^2 \end{cases}$$

（f, φ_2 は定理 28, 29 の証明において用いた写像である）



と定義するとき, h は連続な全射である. $(x, y) \in S_K{}^1$

のとき

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} |x|^2 & x\bar{y} & 0 \\ y\bar{x} & |y|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = f(|x|^2, y\bar{x}) \qquad \text{(i)}$$

であるから h は連続な全単射 $\bar{h}: S_d \underset{\nu}{\cup} e^{2d} \to KP(2)$ を誘導する．しかるに $S_d \cup V_K{}^2$ はコンパクトであるから $S_d \underset{\nu}{\cup} e^{2d}$ もコンパクトであり（命題 75 (1)），かつ $KP(2)$ は Hausdorff 空間であるから $\bar{h}$ は同相写像である（命題 50）．なお，上式（i）は接着の写像が Hopf の写像であることを示している．

（4） 射影空間の胞体分割

$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．点 $X \in KP(n-1)$ を点 $\begin{pmatrix} X & \\ & 0 \end{pmatrix} \in KP(n)$ と同一視することにより，$KP(n-1)$ を $KP(n)$ の部分空間とみなすことにする．

$$KP(0) \subset KP(1) \subset \cdots KP(n-1) \subset KP(n) \subset \cdots$$

定理31.　$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$; $d = 1, 2, 4$ とする．射影空間 $KP(n-1)$ は $e^0, e^d, e^{2d}, \cdots, e^{(n-1)d}$ の n 個の胞体をもつ有限 CW 複体である．

$$\boldsymbol{R}P(n-1) = e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{n-1}$$

$$\boldsymbol{C}P(n-1) = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \cdots \cup e^{2n-2}$$

$$\boldsymbol{H}P(n-1) = e^0 \cup e^4 \cup e^8 \cup \cdots \cup e^{4n-4}$$

なお $KP(k-1)$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$ は $KP(n-1)$ の部分複体である．

証明　$e^0 = KP(0)$, $e^{(k-1)d} = KP(k-1) - KP(k-2)$, $k = 2, \cdots, n$ とおく．$e^{(k-1)d}$ の特性写像 $\varphi: V_K{}^{k-1} \to KP(k-1) \subset KP(n-1)$ は

$$\varphi(x_1, \cdots, x_{k-1}) = \left(x_i \bar{x}_j\right)_{i, j=1, \cdots, k}$$

（ただし $x_k = \sqrt{1 - |x_1|^2 - \cdots - |x_{k-1}|^2}$ とする）で与えられる．実際，φ が同相写像 $\varphi: E_K{}^{k-1} \to e^{(k-1)d}$ を誘導することの証明は射影平面 $KP(2)$ のとき（定理 29）と同様にするとよい．さらに $\varphi(\dot{V}_K{}^{k-1}) \subset KP(k-2) = e^0 \cup e^d \cup \cdots \cup e^{(k-2)d}$ である．（$\varphi: \dot{V}_K{}^{k-1} \to KP(k-2)$ は全射であるから実は $\varphi(\dot{V}_K{}^{k-1}) = e^0 \cup e^d \cup \cdots \cup e^{(k-2)d}$ である）．以上で $KP(n-1)$ の胞体分割 $KP(n-1) = \bigcup_{k=1}^{n} e^{(k-1)d}$ が得られた．

§3. 直交群の胞体

さきに実射影空間 $RP(n-1)$ は直交群 $O(n)$ に埋め込むことができることを示した(定理 25):

$$RP(n-1) \subset O(n)$$

そして $RP(n-1)$ は

$$RP(n-1) = e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{n-1}$$

の胞体分割をもっている (定理 31). これらのことを用いると, $O(n)$ の胞体分割を与えることができることを示そう. 大ざっぱにいえば, $RP(n-1)$ の各胞体 $e^0, e^1, \cdots, e^{n-1}$ を $O(n)$ の群演算により掛ければ $O(n)$ を胞体分割することができるのである.

(1) 直交群の胞体分割

写像 $f: RP(n-1) \to O(n)$, $f(X) = E - 2X$ は単射同相写像であった (定理 25). e^{k-1}, $k = 1, \cdots, n$ を定理 31 で与えた $RP(n-1)$ の胞体とし, $f(e^{k-1}) = e_{O(n)}{}^{k-1}$ とおく. f は単射同相写像であるから $e_{O(n)}{}^{k-1}$ は明らかに $O(n)$ の $k-1$ 次元胞体である. 以後 $e_{O(n)}{}^{k-1}$ を ($RP(n-1)$ の胞体 e^{k-1} の記号と同じであるが) e^{k-1} で表わすことにする. さらに

$$e^{k_1-1, \cdots, k_m-1} = e^{k_1-1} \cdots e^{k_m-1}$$

とおく. ここに $e^{k_1-1} \cdots e^{k_m-1}$ は 16 頁の記号で, $e^{k_1-1} \cdots e^{k_m-1} = \{A_1 \cdots A_m \mid A_i \in e^{k_i-1}, i = 1, \cdots, m\}$ のことである.

つぎの補題 112 を証明するために, つぎの 5 つの写像 $p, h, \varphi, f; \psi$ を整理しておこう. p, h, φ, f はいずれもいままでにすでに用いた写像である.

$$p_k : O(k) \to S^{k-1}, \qquad p_k(A) = Ae_k$$

$$h_k : V^{k-1} \to S^{k-1}, \qquad h_k(\boldsymbol{x}) = (-2\boldsymbol{x}\sqrt{1-\|\boldsymbol{x}\|^2},\ 2\|\boldsymbol{x}\|^2 - 1)$$

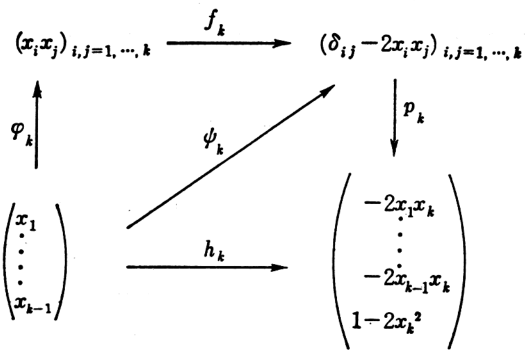
$$\varphi_k : V^{k-1} \to RP(k-1), \qquad \varphi_k(\boldsymbol{x}) = \left(x_i \bar{x}_j\right)_{i,j=1,\cdots,k}$$

ここに $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_{k-1})$, $x_k = \sqrt{1-\|\boldsymbol{x}\|^2}$ とする.

$$f_k : RP(k-1) \to O(k), \qquad f_k(X) = E - 2X$$

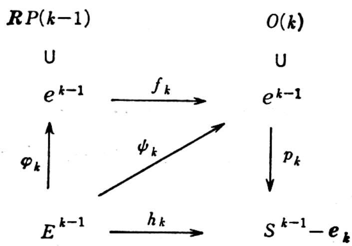
$$\psi_k : V^{k-1} \to O(k), \qquad \psi_k = f_k \varphi_k$$

図式で表わすと



となる.

かつ p_k, h_k, φ_k, f_k ; ψ_k をそれぞれ e^{k-1}, E^{k-1}, E^{k-1}, e^{k-1} ; E^{k-1} に制限すると同相写像である.



さらに，上図において写像を1周させると恒等写像になっている．たとえば，$A\in e^{k-1}$ ならば，$f_k\varphi_kh_k^{-1}p_k(A)=\psi_kh_k^{-1}p_k(A)=A$ である.

$1\leqq k, l\leqq n$ に対して，写像 $\psi_{k,l}: V^{k-1}\times V^{l-1}\to O(n)$ を

$$\psi_{k,l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\psi_k(\boldsymbol{x})\psi_l(\boldsymbol{y})$$

と定義する．($\varphi_k(\boldsymbol{x})=X$, $\varphi_l(\boldsymbol{y})=Y$ とおくと $\psi_{k,l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(E-2X)(E-2Y)$ のことである)．さて $k>l$ のとき，$\psi_{k,l}$ が同相写像 $\psi_{k,l}: E^{k-1}\times E^{l-1}\to e^{k-1,l-1}$ を誘導することを示そう．まず $\psi_{k,l}$ が連続写像であることは明らかである．$A=A_1A_2\in e^{k-1,l-1}$ ($A_1\in e^{k-1}$, $A_2\in e^{l-1}$) に対して，$k>l$ であるから $p_k(A)=p_k(A_1)$ となることに注意すると，$\psi_kh_k^{-1}p_k(A)=\psi_kh_k^{-1}p_k(A_1)=A_1$ となる．ゆえに $A=A_1A_2$ より $A_2=A_1^{-1}A=(\psi_kh_k^{-1}p_k(A))^{-1}A$ となる．したがって写像 $\chi_{k,l}: e^{k-1,l-1}\to E^{k-1}\times E^{l-1}$

$$\chi_{k,l}(A) = (h_k{}^{-1}p_k(A),\ h_l{}^{-1}p_l((\psi_k h_k{}^{-1}p_k(A))^{-1}A))$$

は $\psi_{k,l}$ の逆写像である．この $\chi_{k,l}$ は連続写像 p, h^{-1}, ψ の合成および行列の積や行列の逆行列をとる操作の組合せでつくられているから連続写像である．よって $\psi_{k,l}$ は同相写像である．したがって $k > l$ ならば，$e^{k-1,l-1}$ は $O(n)$ の $(k-1)+(l-1)$ 次元の胞体であり，その特性写像は $\psi_{k,l}: V^{k-1} \times V^{l-1} \to O(n)$ で与えられることがわかった．このことを拡張してつぎの補題を得る．

補題 112. $n \geqq k_1 > \cdots > k_m \geqq 1$ ならば，$e^{k_1-1,\cdots,k_m-1}$ は $O(n)$ の $(k_1-1)+\cdots+(k_m-1)$ 次元胞体である．

証明 写像 $\psi_{k_1,\cdots,k_m}: V^{k_1-1} \times \cdots \times V^{k_m-1} \xrightarrow{\varphi_{k_1}\times\cdots\times\varphi_{k_m}} RP(k_1-1) \times \cdots \times RP(k_m-1) \xrightarrow{f_{k_1}\times\cdots\times f_{k_m}} O(k_1) \times \cdots \times O(k_m) \to O(n) \times \cdots \times O(n) \to O(n)$ を

$$\psi_{k_1,\cdots,k_m}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m) = \psi_{k_1}(\boldsymbol{x}_1)\cdots\psi_{k_m}(\boldsymbol{x}_m)$$

と定義するとき，$\psi_{k_1,\cdots,k_m}$ が同相写像 $\psi_{k_1,\cdots,k_m}: E^{k_1-1} \times \cdots \times E^{k_m-1} \to e^{k_1-1,\cdots,k_m-1}$ を誘導することが上述と同様にして証明される．したがって $e^{k_1-1,\cdots,k_m-1}$ は $O(n)$ の $(k_1-1)+\cdots+(k_m-1)$ 次元の胞体であり，その特性写像は $\psi_{k_1,\cdots,k_m}: V^{k_1-1} \times \cdots \times V^{k_m-1} \to O(n)$ で与えられる．

補題 113. $O(n)$ の胞体 e^{k-1} に対してつぎの (1), (2), (3) がなりたつ．

(1) $\psi_{k+1}(\dot{V}^k) = \psi_k(V^{k-1}) = \overline{e^{k-1}} = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^{k-1}$

(2) $e^{k'-1}e^{k-1} = e^{k-1}e^{k'-1}$

(3) $\overline{e^{k-1}}\,\overline{e^{k-1}} = \overline{e^{k-1}}\,\overline{e^{k-2}} \quad (k \geqq 2),\quad e^0e^0 = E$

証明 以下 ψ_{k+1}, ψ_k の添数を省略して ψ と表わすことにする．

(1) まず $\psi(\dot{V}^k) \subset \psi(V^{k-1})$ である．実際，$\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k) \in \dot{V}^k = S^{k-1} \subset V^k$ に対して

$$\psi(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} (\delta_{ij} - 2a_ia_j)_{i,j=1,\cdots,k} & \\ & 1 \end{pmatrix} \underset{(\text{同一視})}{=\!=} (\delta_{ij} - 2a_ia_j)_{i,j=1,\cdots,k}$$

であるから，$\boldsymbol{x} = (a_1, \cdots, a_{k-1}) \in V^{k-1}$ とおくと $\psi(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{a})$ となる ($\psi(\boldsymbol{a}) = \psi(-\boldsymbol{a})$ に注意)．よって $\psi(\boldsymbol{a}) = \psi(\boldsymbol{x}) \in \psi(V^{k-1})$ である．逆に $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_{k-1}) \in V^{k-1}$ に対して $\boldsymbol{a} = (x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k) \in \dot{V}^k$ $(x_k = \sqrt{1-\|\boldsymbol{x}\|^2})$ を考えると $\psi(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{a}) \in \psi(\dot{V}^{k-1})$ であるから $\psi(V^{k-1}) \subset \psi(\dot{V}^k)$ となる．よって $\psi(\dot{V}^k) = \psi(V^{k-1})$ である．$RP(n-1)$ においては

$$\varphi(\dot{V}^k) = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^{k-1}$$

がなりたつ（定理 31 の証明）から，これに埋め込み $f: RP(n-1) \to O(n)$ を施すと $\psi(\dot{V}^k) = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^{k-1}$ を得る． 最後に $\psi(V^{k-1}) = \overline{e^{k-1}}$ であることは補題 109 である．

（2） $k' < k$ と仮定しておいてよい．$\boldsymbol{x} \in E^{k-1}$ に対して $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{x}, \sqrt{1-\|\boldsymbol{x}\|^2}) \in S^{k-1}$ とおくとき $\psi(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{a}) = D_a$ である． また $\boldsymbol{y} \in E^{k'-1}$ に対して $\psi(\boldsymbol{y}) = B$ とおく． このとき

$$\psi(\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{x}) = BD_a = (BD_aB^{-1})B = D_{Ba}B$$

（補題 103 (3)）となる． しかるに $B\boldsymbol{a} = (B\boldsymbol{x}, \sqrt{1-\|\boldsymbol{x}\|^2}) = (B\boldsymbol{x}, \sqrt{1-\|B\boldsymbol{x}\|^2})$ であるから $D_{Ba} = \psi(B\boldsymbol{a}) = \psi(B\boldsymbol{x})$ となるので $\psi(\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{x}) = \psi(B\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{y}) \in e^{k-1}e^{k'-1}$ となる． よって $e^{k'-1}e^{k-1} \subset e^{k-1}e^{k'-1}$ である． 逆に $e^{k-1}e^{k'-1} \subset e^{k'-1}e^{k-1}$ であることも

$$\psi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{y}) = D_aB = BBD_aB \ (B^{-1} = B \text{ に注意}) = BD_{Ba} = \psi(\boldsymbol{y})\psi(B\boldsymbol{x}) \in e^{k'-1}e^{k-1}$$

よりよい． よって (2) が示された．

（3） $\overline{e^{k-1}}\,\overline{e^{k-2}} \subset \overline{e^{k-1}}\,\overline{e^{k-1}}$ は明らかであるから $\overline{e^{k-1}}\,\overline{e^{k-1}} \subset \overline{e^{k-1}}\,\overline{e^{k-2}}$ を示そう． そのためには $e^{k-1}e^{k-1} \subset \overline{e^{k-1}}\,\overline{e^{k-2}}$ を示すと十分である． $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_{k-1}) \in V^{k-1}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_{k-1}) \in V^{k-1}$ に対して

$$\psi(\boldsymbol{x}) = A = \left(\delta_{ij} - 2x_ix_j\right), \qquad x_k = \sqrt{1-\|\boldsymbol{x}\|^2}$$

$$\psi(\boldsymbol{y}) = B = \left(\delta_{ij} - 2y_iy_j\right), \qquad y_k = \sqrt{1-\|\boldsymbol{y}\|^2}$$

とおく．$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ のときには $AB = AA = E = e^0e^0 \in \overline{e^{k-1}}\,\overline{e^{k-2}}$ であるから $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ としておく． さて $u_k > 0$ を

$$u_k^2 = x_k^2 + y_k^2 - 2x_ky_kr, \qquad r = \sum_{i=1}^{k} x_iy_i = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

より求める．($\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ であるから $u_k \neq 0$ である．実際，$u_k = 0$ であるとすると $0 = x_k^2 + y_k^2 - 2x_ky_kr = (x_k - y_k)^2 + 2x_ky_k(1-r)$ より $x_k = y_k$, $r = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1$ がわかりこれより $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ となる)． つぎに

$$u_iu_k = x_ix_k + y_iy_k - 2x_iy_kr, \qquad i = 1, \cdots, k-1$$

より $u_1, \cdots, u_{k-1}$ を求める． また $v_1, \cdots, v_{k-2}, v_{k-1}$ ($v_{k-1} > 0$) を

$$v_iv_{k-1} = \frac{1}{u_k^2}(x_iy_k - y_ix_k)(x_{k-1}y_k - y_{k-1}x_k), \qquad i = 1, \cdots, k-1$$

より求める．($v_{k-1} = 0$ のときも起こるが，このときには大きいほうから数えて初めて $x_l y_k - y_lx_k \neq 0$ となる l をとり v_{k-1} の代りに v_l を用いて同様なことを行なうとよい

$(e^{k-1}e^{k-1} \subset e^{k-1}e^{l}$ となる) ので $v_{k-1} \neq 0$ としておく). このとき

$$u_i u_j = \frac{u_i u_k u_j u_k}{u_k^{\ 2}} = \frac{1}{u_k^{\ 2}}(x_i x_k + y_i y_k - 2x_i y_k r)(x_j x_k + y_j y_k - 2x_j y_k r)$$

$$v_i v_j = \frac{v_i v_{k-1} v_j v_{k-1}}{v_{k-1}^{\ 2}} = \frac{1}{u_k^{\ 2}}(x_i y_k - y_i x_k)(x_j y_k - y_j x_k)$$

となる. これを用いて

$$\Bigl(\delta_{ij} - 2u_i u_j\Bigr)\begin{pmatrix} \delta_{ij} - 2v_i v_j & \\ & 1 \end{pmatrix} = \Bigl(\delta_{ij} - 2u_i u_j - 2v_i v_j + 4\sum_{m=1}^{k} u_i u_m v_j v_m\Bigr)$$

(ただし $v_k = 0$ と約束する) の右辺を計算すると (計算は簡単でないかも知れないが単純な計算にすぎないので省略する).

$$= \Bigl(\delta_{ij} - 2x_i x_j - 2y_i y_j + 4x_i y_j r\Bigr) = \Bigl(\delta_{ij} - 2x_i x_j\Bigr)\Bigl(\delta_{ij} - 2y_i y_j\Bigr) = AB$$

となる. ゆえに $\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_{k-1}) \in E^{k-1}$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_{k-2}) \in E^{k-2}$ とおくと $(v^{k-1} \neq 0$ の条件のもとに) $AB = \phi(\boldsymbol{u})\phi(\boldsymbol{v}) \in e^{k-1}e^{k-2}$ となる. 以上により (3) が証明された.

定理32. 直交群 $O(n)$ は E (単位行列), $e^{k_1-1,\cdots,k_m-1}$, $n \geqq k_1 > \cdots > k_m \geqq 1$ の 2^n 個の胞体よりなる有限 CW 複体である. さらに $O(k)$ $(1 \leqq k < n)$ は $O(n)$ の部分複体である.

証明 $(k_1, \cdots, k_m) \neq (k_1', \cdots, k_l')$ ならば $e^{k_1-1,\cdots,k_m-1} \cap e^{k_1'-1,\cdots,k_l'-1} = \phi$ を示そう. 実際, 共有元 A が存在したとすると, A は2通りの表わし方

$$A_1 \cdots A_m = A_1' \cdots A_l' \qquad (A_i \in e^{k_i-1},\ A_j' \in e^{k_j'-1})$$

をもっている. もし $k_1 = k_1'$ ならば両辺に p_{k_1} を施すと

$$p_{k_1}(A_1) = p_{k_1}(A_1 \cdots A_m) = p_{k_1}(A_1' \cdots A_l') = p_{k_1}(A_1')$$

となる. p_{k_1} は e^{k_1-1} 上では単射であるから $A_1 = A_1'$ を得る. ゆえに

$$A_2 \cdots A_m = A_2' \cdots A_l'$$

となる. $k_2 = k_2', \cdots, k_{s-1} = k_{s-1}'$, $k_s \neq k_s'$ とすると, 上述と同様にすると

$$A_s \cdots A_m = A_s' \cdots A_l'$$

を得る. いま $k_s > k_s'$ であるとして上式に p_{k_s} を施すと

$$e_{k_s} \neq p_{k_s}(A_s) = p_{k_s}(A_s \cdots A_m) = p_{k_s}(A_s' \cdots A_l') = p_{k_s}(A_s') = e_{k_s}$$

となり矛盾する. また $k_1 = k_1', \cdots, k_m = k_m'$ かつ $m < l$ とするときにも $E = A_{m+1}' \cdots A_l'$ となり, 明らかにこれもおこり得ない. 以上で $(k_1, \cdots, k_m) \neq (k_1', \cdots, k_l')$ のとき $e^{k_1-1,\cdots,k_m-1}$ と $e^{k_1'-1,\cdots,k_l'-1}$ は共有元をもたないことがわかった. つぎにこれらの胞体の

和集合が $O(n)$ に一致することを n に関する帰納法を用いて証明しよう. $n=1$ のときは $O(1)=\{1,-1\}$ であるから, $O(1)$ は $E=1$, $e^0=-1$ の2つの胞体からなる有限胞複体である. $O(n-1)$ が E, $e^{k_1-1,\cdots,k_m-1}$, $n-1\geqq k_1>\cdots>k_m\geqq 1$ の胞体からなる(有限)胞複体であると仮定しよう. さて $A\in O(n)$ が $A\notin O(n-1)$ とすると $p_n(A)\neq e_n$ であるから, $\psi_n h_n^{-1}p_n(A)=A_1$ とおくとき $A_1\in e^{n-1}$ である. このとき $p_n(A_1)=p_n(\psi_n h_n^{-1}p_n(A))=(p_n\psi_n h_n^{-1})p_n(A)=p_n(A)$ であるから $A_1^{-1}A\in O(n-1)$ である. ゆえに帰納法の仮定より $A_1^{-1}A$ はある胞体 $e^{k_2-1,\cdots,k_m-1}$ $(n-1\geqq k_2>\cdots>k_m\geqq 1)$ に属する. したがって $A=A_1(A_1^{-1}A)\in e^{n-1,k_2-1,\cdots,k_m-1}$ である. 最後に各胞体 $e^{k_1-1,\cdots,k_m-1}$ の特性写像 $\psi_{k_1,\cdots,k_m}: V^{k_1-1}\times\cdots\times V^{k_m-1}\to O(n)$ が

$$(V^{k_1-1}\times\cdots\times V^{k_m-1})^{\cdot}=\bigcup_{j=1}^{m}(V^{k_1-1}\times\cdots\times V^{k_{j-1}-1}\times\dot{V}^{k_j-1}\times V^{k_{j+1}-1}\times\cdots\times V^{k_m-1})$$

を $(k_1-1)+\cdots+(k_m-1)$ より低い次元の胞体の和集合の中に移すことを示さねばならない. しかるに

$$\psi_{k_1,\cdots,k_m}(V^{k_1-1}\times\cdots\times V^{k_{j-1}-1}\times\dot{V}^{k_j-1}\times V^{k_{j+1}-1}\times\cdots\times V^{k_m-1})=\overline{e^{k_1-1}}\cdots\overline{e^{k_{j-1}-1}}\,\overline{e^{k_j-2}}\,\overline{e^{k_{j+1}-1}}\cdots\overline{e^{k_m-1}}$$

である(補題113(1))がこの右辺に補題113を繰返し用いると, これが $(k_1-1)+\cdots+(k_m-1)-1$ 以下の次元の胞体 $e^{k_1'-1,\cdots,k_l'-1}$ $(n\geqq k_1'>\cdots>k_l'\geqq 1)$ の和集合に含まれることがわかる. 以上により定理に示すような $O(n)$ の胞体分割が得られることが証明された. なおこの胞体分割の仕方においては, 明らかに $O(k)$ $(1\leqq k<n)$ は $O(n)$ の部分複体になっている. (さらに埋め込み $RP(n-1)\subset O(n)$ により $RP(n-1)$ は $O(n)$ の部分複体である).

例 131. 定理32を $n=2$ のときに具体的に再現してみよう. $O(2)$ は2つの0次元胞体

$$E=\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix},\qquad e_0=\begin{pmatrix}-1&\\&1\end{pmatrix}$$

と2つの1次元胞体

$$e^1=\left\{\begin{pmatrix}-\cos\theta&-\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\middle|\,0<\theta<2\pi\right\}$$

$$e^{1,0}=e^1e^0=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\middle|\,0<\theta<2\pi\right\}$$

(例 123) をもつ有限 CW 複体である.

射影 $p: O(n) \to S^{n-1}$, $p(A) = Ae_n$ は連続な断面をもたない (ただし $n \neq 1, 2, 4, 8$ とする (定理 18)) ことが知られている. すなわち $ps = 1$ をみたす連続写像 $s: S^{n-1} \to O(n)$ が存在しない. しかし S^{n-1} から 1 点を除くと連続な断面 s をもつのである. すなわち $ps = 1$ をみたす連続写像 $s: S^{n-1} - e_n \to O(n)$ が存在する. 実際, 写像 $s = f_n \varphi_n h_n^{-1}$: $S^{n-1} - e_n \to O(n)$ が $ps = 1$ をみたしている. この写像 s を後で用いる (定理 50) ので写像 s の形を具体的にかいておこう.

$$s: S^{n-1} - e_n \xrightarrow{h_n^{-1}} E^{n-1} \xrightarrow{\varphi_n} RP(n-1) \xrightarrow{f_n} O(n)$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \xrightarrow{h_n^{-1}} \begin{pmatrix} \dfrac{-a_1}{\sqrt{2(1-a_n)}} \\ \vdots \\ \dfrac{-a_{n-1}}{\sqrt{2(1-a_n)}} \end{pmatrix}$$

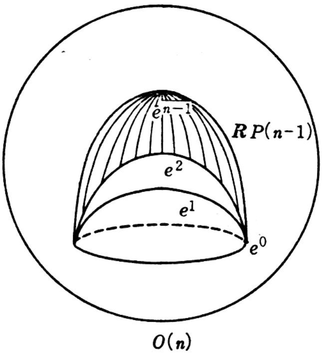
$a_n \neq 1$ (補題 105)

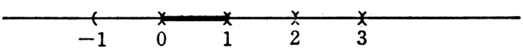
$$\xrightarrow{\varphi_n} \begin{pmatrix} \dfrac{a_1 a_1}{2(1-a_n)} \cdots \dfrac{a_1 a_{n-1}}{2(1-a_n)} & -\dfrac{a_1}{2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{a_{n-1} a_1}{2(1-a_n)} \cdots \dfrac{a_{n-1} a_{n-1}}{2(1-a_n)} & -\dfrac{a_{n-1}}{2} \\ -\dfrac{a_1}{2} \quad \cdots \quad \dfrac{a_{n-1}}{2} & \dfrac{1-a_n}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_n} \begin{pmatrix} 1-\dfrac{a_1 a_1}{1-a_n} \cdots & -\dfrac{a_1 a_{n-1}}{1-a_n} & a_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ -\dfrac{a_{n-1} a_1}{1-a_n} \cdots & 1-\dfrac{a_{n-1} a_{n-1}}{1-a_n} & a_{n-1} \\ a_1 \quad \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = s(\boldsymbol{a})$$

例 132. 直交群 $O(3)$ を例にとって, 定理 32 を再びふりかえってみよう. $O(3)/O(2) \simeq S^2$ (定理 15) を思い出そう. 定理 32 で用いた 2 次元胞体 $e^2 = \phi_3(E^2)$ は上記の $s: S^2 - e_3 \to O(3)$ による像 $s(S^2 - e_3) = e^2$ であった. さて分母の群 $O(2)$ がすでに E, e^0, e^1, $e^{1,0}$ の胞体をもつ複体である (例 131) ことがわかっているので, これらの胞体にいまつくった胞体 e^2 を $O(3)$ における群の積により左からかけて胞体 e^2, $e^{2,0}$, $e^{2,1}$, $e^{2,1,0}$ をつくると, これらと $O(2)$ の胞体 E, e^0, e^1, $e^{1,0}$ とあわせて分子の群 $O(3)$ の胞体分割が得られるのである. $O(n)/O(n-1) \simeq S^{n-1}$ についても全く同じ状態にある.

お話し　等質空間 $O(n)/O(n-1)$ が球面 S^{n-1} と同相である：$O(n)/O(n-1)\simeq S^{n-1}$（定理 15）という事実の幾何学的な直観をつぎのような形で述べてみよう．$O(n)$ における胞体 e^{n-1} に分母の群 $O(n-1)$ を右から掛けると $O(n)$ 全体を覆う（定理 32, 例 132）が，$O(n)$ の中で e^{n-1} 以外の集合，すなわち分母の群 $O(n-1)$ および分母の群 $O(n-1)$ で e^{n-1} を実際に動かした集合をすべて 1 点に縮めた空間が S^{n-1} であることを意味している．式でかくと $O(n)/(O(n)-e^{n-1})=S^{n-1}$ である．同じ内容を $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}\simeq S^1$（例 99）で述べてみよう．$\boldsymbol{R}$ は 0 次元胞体 $\cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots$ と 1 次元胞体 $\cdots, (-1, 0), (0, 1), (1, 2), \cdots$ をもつ胞複体であった（例 127）．射影 $p:\boldsymbol{R}\to S^1$, $p(x)=e^{2\pi ix}$ は連続な断面をもたない（例 111）が，S^1 から 1 点を除いた空間では連続な断面 $s:S^1-\{1\}\to\boldsymbol{R}$ をもっている．





実際，$S^1-\{1\}$ の点は一意的に $e^{2\pi i\theta}$, $0<\theta<1$ と表わされるので，写像 $s:S^1-\{1\}\to\boldsymbol{R}$ を $s(e^{2\pi i\theta})=\theta$ と定義すると $ps=1$ となっている．そして $\boldsymbol{R}$ の 1 次元胞体 $(0, 1)$ は $s(S^1-\{1\})$ のことであり，$\boldsymbol{R}$ は分母の群 $\boldsymbol{Z}$（これが 0 次元胞体である）と $(0, 1)$ を $\boldsymbol{Z}$ の元により平行移動してできる 1 次元胞体をあわせると $\boldsymbol{R}$ の胞体分割が得られたわけである．上述のことを逆の見方をするとつぎのようになる．1 次元胞体 $(0, 1)$ 以外の胞体は $\boldsymbol{Z}$ および $(0, 1)$ を $\boldsymbol{Z}-\{0\}$ の元により平行移動した胞体であり，それらの和集合が $(-\infty, 1]\cup[1, \infty)$ である．そして $\boldsymbol{R}$ において $(-\infty, 0]\cup[1, \infty)$ を 1 点に縮めた空間が S^1 である（例 103）：$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{R}/((-\infty, 0]\cup[1, \infty))=\boldsymbol{R}/(\boldsymbol{R}-(0, 1))=S^1$.

$O(n)/O(n-1)\simeq S^{n-1}$ についてつぎの見方もできるであろう．$O(n)$ の胞体のうち $e^{n-1, k_2-1, \ldots, k_m-1}$（先頭の次元が $n-1$）の形の胞体に射影 $p:O(n)\to S^{n-1}$ を施すと $S^{n-1}-e_n$ に写像され，胞体 $e^{k_1-1, \cdots, k_m-1}(k_1\neq n)$ は p により e_n に写像される．すなわち $O(n)$ の胞体のうちの半分の 2^{n-1} 個の胞体が p により $S^{n-1}-e_n$ に移され，残りの胞体が e_n に移されるのである．同じことを $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}\simeq S^1$ について述べると，$\boldsymbol{R}$ の各 1 次元胞体 $\cdots(-1, 0), (0, 1), (1, 2)\cdots$ は射影 $p:\boldsymbol{R}\to S^1$, $p(x)=e^{2\pi ix}$ により $S^1-\{1\}$ に写像され，0 次

元胞体は1に移されている．この考え方は上述の $\boldsymbol{R}$ の $(0, 1)$ 以外の集合を1点に縮めるという考え方と異なる考え方であり，これは第4章の被覆空間，ファイバー空間の概念に結びついている．

(2) 回転群の胞体分割

埋め込み $\boldsymbol{RP}(n-1) \subset SO(n)$ (定理25) と $\boldsymbol{RP}(n-1)$ の胞体分割 $\boldsymbol{RP}(n-1) = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^{n-1}$ を用いると，直交群 $O(n)$ のときと同様にして $SO(n)$ の胞体分割を与えることができることを示そう．

写像 $g : \boldsymbol{RP}(n-1) \to SO(n)$, $g(X) = (E-2X)T$, $T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ は単射同相写像であった (定理25)．e^{k-1}, $k = 1, 2, \cdots, n$ を定理31で与えた $\boldsymbol{RP}(n-1)$ の胞体とし，$g(e^{k-1}) = e_{SO(n)}{}^{k-1}$ とおくと，g が単射同相写像であることから $e_{SO(n)}{}^{k-1}$ は $SO(n)$ の $k-1$ 次元胞体である．この $e_{SO(n)}{}^{k-1}$ を単に e^{k-1} で表わすことにする ($SO(n) \subset O(n)$ とみるとき $e_{SO(n)}{}^{k-1}$ と $e_{O(n)}{}^{k-1}$ は異なるが)．さらに

$$e^{k_1-1, \cdots, k_m-1} = e^{k_1-1} \cdots e^{k_m-1}$$

とおくとき，補題112と同様にするとつぎの補題が証明される．

補題114. $n \geqq k_1 > \cdots > k_m \geqq 2$ ならば $e^{k_1-1, \cdots, k_m-1}$ は $SO(n)$ の $(k_1-1) + \cdots + (k_m-1)$ 次元胞体である．

補題115. $SO(n)$ の胞体 e^{k-1} に対してつぎの (1), (2), (3) がなりたつ ($\psi' = g\varphi$ とする)．

(1) $\psi_{k+1}'(\dot{V}^k) = \psi_k'(V^{k-1}) = \overline{e^{k-1}} = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^{k-1}$

(2) $e^{k'-1}e^{k-1} = e^{k-1}e^{k'-1}$

(3) $\overline{e^{k-1}}\,\overline{e^{k-1}} = \overline{e^{k-1}}\,\overline{e^{k-2}} \qquad (k \geqq 2)$

証明 (1) 補題113(1)の右から行列 T をかけるとよい．

(2) 一般に $A_1 \in e_{O(n)}{}^{k-1}$ に対して $TA_1T \in e_{O(n)}{}^{k-1}$ である．実際，$A_1 = D_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a} \in S^{k-1}, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{e}_k)$ とするとき $TA_1T = TD_{\boldsymbol{a}}T = D_{T\boldsymbol{a}} \in e_{O(n)}{}^{k-1}$ である．さて $B \in e^{k'-1}$, $A \in e^{k-1}$ は $B = B_1T$, $B_1 \in e_{O(n)}{}^{k'-1}$; $A = A_1T, A_1 \in e_{O(n)}{}^{k-1}$ と表わされる．このとき $BA = (B_1T)(A_1T) = B_1(TA_1T)$ となるが，補題113(2)より $A_1' \in e_{O(n)}{}^{k-1}$, $B_1' \in e_{O(n)}{}^{k'-1}$ が存在して $B_1(TA_1T) = A_1'B_1'$ となる．しかるに $A_1'B_1' = (A_1'T)((TB_1'T)T)$, $A_1' \in e_{O(n)}{}^{k-1}$, $TB_1'T \in e_{O(n)}{}^{k'-1}$ であるから $BA = B_1TA_1T = A_1'B_1' = (A_1'T)((TB_1'T)T)$

$\in e^{k-1}e^{k'-1}$ である．よって $e^{k'-1}e^{k-1} \subset e^{k-1}e^{k'-1}$ となる．逆の包含関係 $e^{k-1}e^{k'-1} \subset e^{k'-1}e^{k-1}$ も同様にするとよい．

（3） $A, B \in \overline{e^{k-1}}$ は $A = A_1T$, $B = B_1T$, A_1, $B_1 \in \overline{e_{O(n)}{}^{k-1}}$ と表わされる．$TB_1T \in \overline{e_{O(n)}{}^{k-1}}$ であるから A_1, TB_1T に対して $A_1TB_1T = C_1D_1$ をみたす $C_1 \in \overline{e_{O(n)}{}^{k-1}}$, $D_1 \in \overline{e_{O(n)}{}^{k-2}}$ が存在する（補題 113 (3)）．このとき $AB = A_1TB_1T = C_1D_1 = (C_1T)((TD_1T)T) \in \overline{e^{k-1}}\,\overline{e^{k-2}}$ となり $\overline{e^{k-1}}\,\overline{e^{k-1}} \subset \overline{e^{k-1}}\,\overline{e^{k-2}}$ が示された．逆の包含関係 $\overline{e^{k-1}}\,\overline{e^{k-2}} \subset \overline{e^{k-1}}\,\overline{e^{k-1}}$ は自明である．

さて，この補題を用いるとつぎの定理を得る．証明は定理 32 と同じである．($SO(1) = \{1\} = e^0$ であるから胞体の数は $O(n)$ のときの半分になっている)．

定理 33. 回転群 $SO(n)$ は $e^0 = E$ （単位行列），$e^{k_1-1,\cdots,k_m-1}$, $n \geqq k_1 > \cdots > k_m \geqq 2$ の 2^{n-1} 個の胞体よりなる有限 CW 複体である．なお $SO(k)$ $(1 \leqq k < n)$ は $SO(n)$ の部分複体である．

なおつぎの 2 つのことに注意しておこう．

埋め込み $\boldsymbol{RP}(n-1) \subset SO(n)$ により $\boldsymbol{RP}(n-1)$ は $SO(n)$ の部分複体である．

写像 $s = g\varphi_n h_n{}^{-1} : S^{n-1} - \boldsymbol{e}_n \to SO(n)$ （φ_n, h_n は $O(n)$ のときに用いた写像）は連続であって，かつ $p_n s = 1$ をみたしている．

例 133. 定理 33 を $n = 2$ のときに具体的にかいてみよう．$SO(2)$ は 0 次元胞体 $e^0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ と 1 次元胞体

$$e^1 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| 0 < \theta < 2\pi \right\}$$

をもつ有限 CW 複体である．

例 134. $SO(3)$ は 4 つの胞体 e^0, e^1, e^2, $e^{2,1}$ をもつ胞複体に分割された（定理 33）．一方 $SO(3) \simeq \boldsymbol{RP}(3)$ である（定理 26）から，$SO(3)$ は射影空間としての胞体分割 $SO(3) = e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup e^3$ をもつ（定理 31）が，この両者の胞体分割は一致していない．

§4. ユニタリ群の胞体

ユニタリ群 $U(n)$, $SU(n)$ の胞体分割を与えよう．考え方および証明の方法は直交群 $O(n)$, $SO(n)$ のときと同様である．

（1） 拡張された反射行列

例 122 において $\boldsymbol{a} \in S^2$ に関する反射行列の幾何学的な意味を説明した．これと同じ考

察を複素空間 C^3 で試みよう．これは拡張された反射行列を定義するヒントになっている．

例 135. $a=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in S_C{}^2$ とする．原点を通りベクトル a に垂直な平面の方程式は $\bar{x}a+\bar{y}b+\bar{z}c=0$ であり，この平面へ点 e_1 より下した垂線の方程式は

$$\frac{x-1}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\quad(=k)$$

で与えられる．この直線が再び球面 $S_C{}^2$ と交わる点を求めるために，$x=1+ak$, $y=bk$, $z=ck$ を $|x|^2+|y|^2+|z|^2=1$ に代入すると

$$|1+ak|^2+|bk|^2+|ck|^2=1$$

$$(|a|^2+|b|^2+|c|^2)|k|^2+ak+\bar{a}\bar{k}+1=1$$

となる．$|a|^2+|b|^2+|c|^2=1$ であるから，

$$|k|^2+ak+\bar{a}\bar{k}=0$$

$|\bar{a}|^2$ を両辺に加えると

$$|k+\bar{a}|^2=|\bar{a}|^2$$

となる．ゆえに，ある $\kappa\in C$, $|\kappa|=1$ が存在して $k+\bar{a}=\kappa\bar{a}$, すなわち $k=(\kappa-1)\bar{a}$ と表わされる．したがって交点は $\begin{pmatrix}1+(\kappa-1)a\bar{a}\\(\kappa-1)b\bar{a}\\(\kappa-1)c\bar{a}\end{pmatrix}$ である．同様に点 e_2, e_3 からこの平面へ下した垂線が再び球面 $S_C{}^2$ と交わる点はそれぞれ $\begin{pmatrix}(\mu-1)a\bar{b}\\1+(\mu-1)b\bar{b}\\(\mu-1)c\bar{b}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}(\nu-1)a\bar{c}\\(\nu-1)b\bar{c}\\1+(\nu-1)c\bar{c}\end{pmatrix}$ $\mu,\nu\in S_C{}^0$ で与えられる．

定義 $\kappa\in S_C{}^0$, $a=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\in S_C{}^{n-1}$ とする．$D=D_{(\kappa,a)}\in M(n,C)$ を

$$D=\left(\delta_{ij}+(\kappa-1)a_i\bar{a}_j\right)_{i,j=1,\cdots,n}$$

と定義し，(κ,a) **に関する拡張された反射行列**という．

補題 116. $D=D_{(\kappa,a)}\in M(n,C)$ を $(\kappa,a)\in S_C{}^0\times S_C{}^{n-1}$ に関する拡張された反射行列とするとき，つぎの (1), (2), (3) がなりたつ．

(1) $D\in U(n)$

(2) $\det D=\kappa$

(3) $AD_{(\kappa,a)}A^{-1}=D_{(\kappa,Aa)}$,　　$A\in U(n)$

証明 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ に対し，$X=\left(a_i\bar{a}_j\right)$ とおくと $X\in CP(n-1)$ であり (58

頁)，D は $D=E+(\kappa-1)X$ と表わされることに注意しよう．

(1) $\nu=\kappa-1$ とおくとき $|\kappa|=1$ より $\nu+\bar{\nu}+|\nu|^2=0$ であって $D=E+\nu X$ である．さて $DD^*=(E+\nu X)(E+\nu X)^*=(E+\nu X)(E+\bar{\nu}X^*)=(E+\nu X)(E+\bar{\nu}X)$ $=E+\nu X+\bar{\nu}X+|\nu|^2X^2=E+(\nu+\bar{\nu}+|\nu|^2)X=E$ であるから $D\in U(n)$ である．

(2) $E-2X$ は固有値 $-1, 1$ (1 は $n-1$ 重根) をもつ (補題 103 (2)) から

$$\det(\lambda E-(E-2X))=(\lambda+1)(\lambda-1)^{n-1}$$

が任意の λ についてなりたつ．$\lambda\neq 1$ として $(\lambda-1)^n$ で割ると

$$\det\left(E+\frac{2}{\lambda-1}X\right)=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$$

となる．$\dfrac{2}{\lambda-1}=\kappa-1$ とおくと $\det(E+(\kappa-1)X)=\kappa$ を得る．

(3) $AD_{(\kappa,a)}A^{-1}=A(E+\nu X)A^*=E+\nu(AXA^*)=D_{(\kappa,Aa)}$ である．

補題 117. $a=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in S_C{}^{n-1}$ が $a\neq e_n$ であるならば

$$\begin{pmatrix}(\kappa-1)x_1\bar{x}_n\\ \vdots\\ (\kappa-1)x_{n-1}\bar{x}_n\\ 1+(\kappa-1)x_n\bar{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_{n-1}\\ a_n\end{pmatrix}$$

をみたす $\kappa\in S_C{}^0$ と $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in S_C{}^{n-1}$ が存在する．さらに $x_n>0$ を仮定すると κ, x は a に対して 1 意に定まる．

証明 $|\kappa|=1$, $x_n>0$ であるとする．$\kappa-1=\nu$ とおくと $\nu+\bar{\nu}+|\nu|^2=0$ であることに注意しよう．さて $1+\nu x_n{}^2=a_n$ より

$$\nu x_n{}^2=-(1-a_n),\qquad \bar{\nu}x_n{}^2=-(1-\bar{a}_n)$$

を得る．この 2 つの式を加え，かつ掛けると

$$-|\nu|^2x_n{}^2=-2\mathrm{Re}(1-a_n),\qquad |\nu|^2x_n{}^4=|1-a_n|^2$$

となる．$a\neq e_n$ より $\mathrm{Re}(1-a_n)>0$ であるから，上式より

$$x_n=\frac{|1-a_n|}{\sqrt{2\mathrm{Re}(1-a_n)}}$$

を得る．よって $\nu=-\dfrac{1-a_n}{x_n{}^2}=-\dfrac{2\mathrm{Re}(1-a_n)}{1-\bar{a}_n}=-\dfrac{2-a_n-\bar{a}_n}{1-\bar{a}_n}$ となり

$$\kappa = \nu + 1 = -\frac{1 - a_n}{1 - \bar{a}_n}$$

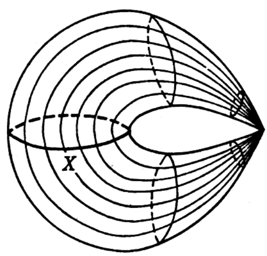
を得る．最後に $\nu x_k x_n = a_k$, $k = 1, \cdots, n-1$ より

$$x_k = -\frac{a_k(1 - \bar{a}_n)}{\sqrt{2\mathrm{Re}(1 - a_n)}\,|1 - a_n|}$$

を得る．逆にいま求めた κ, $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ は求める条件をみたしている．

定理34. ユニタリ群 $U(n)$ は拡張された反射行列により生成される．すなわちユニタリ行列 $A \in U(n)$ に対して有限個の拡張された反射行列 $D_1, \cdots, D_m$ が存在して，A はその積で表わされる：$A = D_1 \cdots D_m$.

証明 n に関する帰納法により証明しよう．$n = 1$ のときは $U(1) = S_C{}^0$ である（例52）から，$\kappa \in U(1)$ は $\kappa = 1 + (\kappa - 1)1$ と表わせるので定理はなりたつ．このあとの証明は定理24の証明と同じであるが再記しよう．$U(n-1)$ で定理が正しいと仮定するとき，$A \in U(n)$, $A \notin U(n-1)$ に対しては $Ae_n \neq e_n$ であるから Ae_n に対して補題117の $(\kappa, \boldsymbol{x}) \in S_C{}^0 \times S_C{}^{n-1}$ をとり，$(\kappa, \boldsymbol{x})$ に関する拡張された反射行列 D をつくると $D^{-1}A = D^*A = \begin{pmatrix} B & \\ & 1 \end{pmatrix}$ となる．したがって $A = DB$, $B \in U(n-1)$ と表わされる．帰納法の仮定により，B は拡張された反射行列の積 $B = D_2 \cdots D_m$ と表わされるので，A は $A = DD_2 \cdots D_m$ と表わされる．



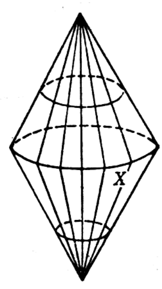
$E(X)$

（2） 準懸垂空間

定義 X を位相空間とし，$V^1 = [-1, 1]$ とする．直積空間 $V^1 \times X$ において $-1 \times X \cup 1 \times X$ を1点に縮めた空間

$$(V^1 \times X) / (-1 \times X \cup 1 \times X)$$

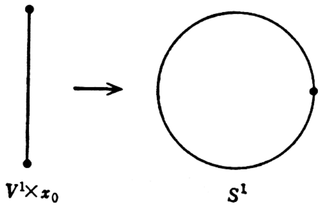
を $E(X)$ で表わし，X の**準懸垂空間**[†] という．点 $(t, x) \in V^1 \times X$ を含む類を $[t, x]$ で表わすことにする．



EX

例136. 1点 x_0 からなる空間の準懸垂空間 $E(x_0)$ は球面 S^1 と同相である：$E(x_0) \simeq S^1$. 実際，写像 $f: V^1 \times x^0 \to S^1$ を

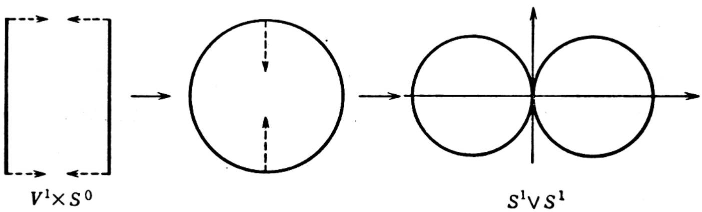
[†] 位相空間 X の**懸垂空間** EX は $V^1 \times X$ において $-1 \times X$, $1 \times X$ をそれぞれ別個の点に縮めた等化空間と定義されている．もちろん懸垂空間 EX と準懸垂空間 $E(X)$ とは異なる．1点 x_0 からなる空間の懸垂空間 Ex_0 は V^1 であり，S^0 の懸垂空間 ES^0 は S^1 と同相である．



$$f(t,\ x_0) = e^{\pi i(t+1)}$$

と定義すると $f(-1,\ x_0) = f(1,\ x_0)$ であるから f は連続写像 $\bar{f}: E(x_0) \to S^1$ を誘導する（補題 76）が $E(x_0)$ がコンパクトである（命題 75 (1)）ことに注意すると $\bar{f}$ が同相写像であることが容易にわかる．

例 137.　$S^0 = \{-1,\ 1\}$ の準懸垂空間 $E(S^0)$ は $S^1 \vee S^1$ と同相である．ここに $S^1 \vee S^1$ は下図のように 2 つの円 S^1 を 1 点でくっつけた



空間である．実際，写像 $f: E(S^0) \to S^1 \vee S^1$ を

$$\begin{cases} f([t,\ -1]) = \left(-\sin^2\dfrac{\pi(t+1)}{2},\ \sin\dfrac{\pi(t+1)}{2}\cos\dfrac{\pi(t+1)}{2}\right) \\ f([t,\ 1]) = \left(\sin^2\dfrac{\pi(t+1)}{2},\ \sin\dfrac{\pi(t+1)}{2}\cos\dfrac{\pi(t+1)}{2}\right) \end{cases}$$

と定義すると f は同相写像であることが容易に確かめられる．

つぎの定理は定理 25 に対応する定理であり，$U(n)$ の胞体分割を与えるのに基本的な役割を果たす．

定理 35.　$E(CP(n-1))$ を射影空間 $CP(n-1)$ の準懸垂空間とするとき，写像 f: $E(CP(n-1)) \to U(n)$,

$$f([t,\ X]) = E + (e^{\pi i(t+1)} - 1)X$$

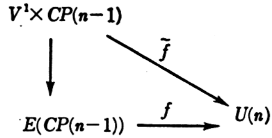
は単射同相写像である．したがって $E(CP(n-1))$ とその f による像を同一視すると埋め込み

$$E(CP(n-1)) \subset U(n)$$

を得る．

証明　写像 $\tilde{f}: V^1 \times CP(n-1) \to U(n)$ を $\tilde{f}(t,\ X) = E + (e^{\pi i(t+1)} - 1)X$ と定義する．（$\tilde{f}(t,\ X) \in U(n)$ であることは補題 116 (1) である）．任意の $X \in CP(n-1)$ に

対して



$$\tilde{f}(-1, X) = \tilde{f}(1, X) = E$$

であるから $\tilde{f}$ は連続写像 $f: E(CP(n-1)) \to U(n)$, $f([t, X]) = \tilde{f}(t, X)$ を誘導する（補題 76).
f は単射である. 実際, $\tilde{f}(t, X) = \tilde{f}(s, Y)$ とすると

$$E + (e^{\pi i(t+1)} - 1)X = E + (e^{\pi i(s+1)} - 1)Y$$

である. ゆえに $\quad (e^{\pi i(t+1)} - 1)X = (e^{\pi i(s+1)} - 1)Y$

となる. $s, t \neq \pm 1$ であるとして両辺のトレースをとると, $\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(Y) = 1$ より

$$e^{\pi i(t+1)} - 1 = e^{\pi i(s+1)} - 1$$

すなわち $e^{\pi i(t+1)} = e^{\pi i(s+1)}$ を得る. しかるに $0 < t+1, s+1 < 2$ であるから $t = s$ となり, さらに $X = Y$ もわかる. よって f は単射である（補題 2 (2)). $V^1 \times CP(n-1)$ はコンパクトであるから $E(CP(n-1))$ もコンパクトであり（命題 75 (1)), かつ $U(n)$ は Hausdorff 空間であるから f は単射同相写像である（命題 50).

命題 118. $E(CP(n-1))$ は $e^0, e^1, e^3, e^5, \cdots, e^{2n-1}$ の $n+1$ 個の胞体からなる有限 CW 複体である.

証明 $e^0 = [1, CP(0)]$, $e^1 = E(CP(0)) - e^0$, $e^{2k-1} = E(CP(k-1)) - E(CP(k-2))$, $k = 2, \cdots, n$ とおく. e^{2k-1} が $E(CP(n-1))$ の $2k-1$ の胞体であることを示すために, その特性写像 ϕ_k を与えよう. 写像 $\phi_k : V^1 \times V_C{}^{k-1} \xrightarrow{1\times\varphi} V^1 \times CP(n-1) \xrightarrow{q} E(CP(n-1))$ を

$$\phi_k(t, x) = q(t, \varphi(x)) = [t, \varphi(x)]$$

と定義する. ここに $\varphi: V_C{}^{k-1} \to CP(n-1)$ は $CP(n-1)$ の $2(k-1)$ 次元胞体 e^{2k-2} を定義するために用いた写像であり（定理 31), $q: V^1 \times CP(n-1) \to E(CP(n-1))$ は射影とする. φ は同相写像 $\varphi: E_C{}^{k-1} \to e^{2k-2}$ を誘導し, かつ $q: E^1 \times CP(n-1) \to E(CP(n-1))$ は単射同相写像である（$E^1 \times CP(n-1)$ は $V^1 \times CP(n-1)$ において 1 点に縮める部分集合以外の集合であることに注意）から, ϕ_k は同相写像 $\phi_k: E^1 \times E_C{}^{k-1} \to e^{2k-1}$ を誘導することがわかる. したがって e^{2k-1} は $2k-1$ 次元の胞体である. さらに $\phi_k(\dot{V}^1 \times V_C{}^{k-1}) = e^0$, $\phi_k(V^1 \times \dot{V}_C{}^{k-1}) \subset E(CP(k-2)) = e^0 \cup \bigcup_{j=1}^{k-1} e^{2j-1}$ である. 以上で $E(CP(n-1))$ の胞体分割 $E(CP(n-1)) = e^0 \cup \bigcup_{k=1}^{n} e^{2k-1}$ が与えられた. ($\varphi_k : \dot{V}_C{}^{k-1} \to CP(k-2)$ は全射である（定理 31 の証明）から $\phi_k : V^1 \times \dot{V}_C{}^{k-1} \xrightarrow{1\times\varphi_k} V^1 \times CP(k-2)$

$\xrightarrow{q} E(CP(k-2))$ も全射である．よって

$$\phi_k((V^1 \times V_C{}^{k-1})^\cdot) = E(CP(k-2)) = e^0 \cup e^1 \cup e^3 \cup \cdots \cup e^{2k-3}$$

となっている）．

(3) ユニタリ群の胞体分割

埋め込み $E(CP(n-1)) \subset U(n)$（定理 35）と $E(CP(n-1))$ の胞体分割 $E(CP(n-1)) = e^0 \cup e^1 \cup e^3 \cup \cdots \cup e^{2n-1}$（命題 118）を用いると，$O(n)$ と同様にしてユニタリ群 $U(n)$ の胞体分割を与えることができることを示そう．

写像 $f: E(CP(n-1)) \to U(n)$, $f(X) = E + (e^{\pi i(t+1)} - 1)X$ は単射同相写像であった（定理 35）．e^{2k-1}, $k = 1, \cdots, n$ を命題 118 で与えた $E(CP(n-1))$ の胞体とし $f(e^{2k-1}) = e_{U(n)}{}^{2k-1}$ とおく．f が単射同相写像であるから，$e_{U(n)}{}^{2k-1}$ は $U(n)$ の $2k-1$ 次元の胞体である．この $e_{U(n)}{}^{2k-1}$ を（$E(CP(n-1))$ の胞体 e^{2k-1} の記号と同じであるが）e^{2k-1} で表わすことにする．さらに

$$e^{2k_1-1, \cdots, 2k_m-1} = e^{2k_1-1} \cdots e^{2k_m-1}$$

とおく．$O(n)$ のときと同様につぎの 5 つの写像 $p, h, \phi, f; \psi$ を整理しておこう．

$$p_k : U(k) \ \to \ S_C{}^{k-1}, \quad p_k(A) = Ae_k$$

$$h_k : V^1 \times V_C{}^{k-1} \ \to \ S_C{}^{k-1}, \ h_k(t, \boldsymbol{x}) = (\nu \boldsymbol{x}\sqrt{1 - \|\boldsymbol{x}\|^2}, 1 + \nu(1 - \|\boldsymbol{x}\|^2))$$

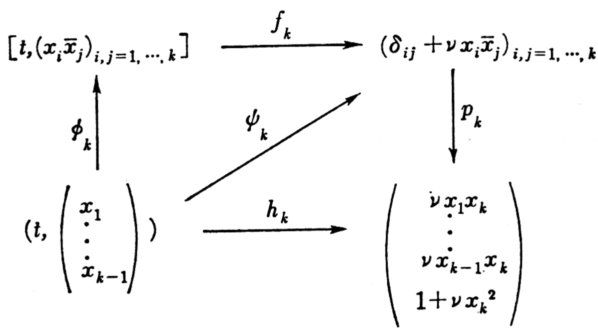
$$\phi_k : V^1 \times V_C{}^{k-1} \ \to \ E(CP(k-1)), \quad \phi_k(t, \boldsymbol{x}) = [t, (x_i \bar{x}_j)_{i,j=1,\cdots,k}]$$

$$f_k : E(CP(k-1)) \ \to \ U(k), \quad f_k(t, X) = E + \nu X$$

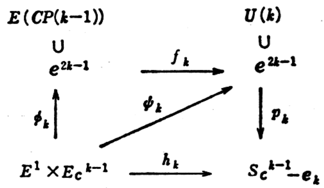
$$\psi_k : V^1 \times V_C{}^{k-1} \ \to \ U(k), \quad \psi_k = f_k \phi_k$$

ここに $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots x_{k-1})$, $x_k = \sqrt{1 - \|\boldsymbol{x}\|^2}$, $\nu = e^{\pi i(t+1)} - 1$ とする．

図式で表わすと



となる．かつ p_k, h_k, ϕ_k, f_k ; ψ_k を $e^{2k-1}, E^1\times E_C{}^{k-1}, E^1\times E_C{}^{k-1}, e^{2k-1}$; $E^1\times E_C{}^{k-1}$ に制限すると同相写像である（h_k の逆写像が連続であることは補題117の証明における κ, x の形より明らか である）.



上図において写像を１周させると恒等写像になっている．

これらの写像を用いると $O(n)$ のとき（補題112）と同様にしてつぎの補題を得る．

補題 119. $n\geqq k_1>\cdots>k_m\geqq 1$ ならば，$e^{2k_1-1,\cdots,2k_m-1}$ は $U(n)$ の $(2k_1-1)+\cdots+(2k_m-1)$ 次元胞体である．

補題 120. $U(n)$ の胞体 e^{2k-1} に対してつぎの (1), (2), (3) がなりたつ．

（1）　$\psi_{k+1}((V^1\times V_C{}^k)^{\cdot})=\psi_k(V^1\times V_C{}^{k-1})=\overline{e^{2k-1}}=e^0\cup e^1\cup e^3\cup\cdots\cup e^{2k-1}$

（2）　$e^{2k'-1}e^{2k-1}=e^{2k-1}e^{2k'-1}$

（3）　$\overline{e^{2k-1}}\,\overline{e^{2k-1}}=\overline{e^{2k-1}}\,\overline{e^{2k-3}}\quad(k\geqq 2),\qquad \overline{e^1}\,\overline{e^1}=\overline{e^1}$

証明（補題113参照）ψ_{k+1}, ψ_k の添数を省略して ψ で表わすことにする．

（1）　まず $\psi((V^1\times V_C{}^k)^{\cdot})\subset\psi(V^1\times V_C{}^{k-1})$ である．実際，$(t, \boldsymbol{a})=(t, (a_1,\cdots, a_{k-1}, a_k))\in V^1\times \dot{V}_C{}^k$ に対して $\nu=e^{\pi i(t+1)}-1$ とおくと

$$\psi(t, \boldsymbol{a})=\begin{pmatrix}(\delta_{ij}+\nu a_i\bar{a}_j)_{i,j=1,\cdots,k} & \\ & 1\end{pmatrix}=\left(\delta_{ij}+\nu a_i\bar{a}_j\right)_{i,j=1,\cdots,k}$$

であることに注意しよう．さて $a_k=a_{k-1}=\cdots=a_{l+1}=0$, $a_l\neq 0$ であるとして，$\boldsymbol{x}=\left(\dfrac{a_1\bar{a}_l}{|a_l|},\cdots,\dfrac{a_{l-1}\bar{a}_l}{|a_l|}, 0,\cdots, 0\right)\in V_C{}^{l-1}\subset V_C{}^{k-1}$ とおくと $\psi(t, \boldsymbol{a})=\psi(t, \boldsymbol{x})\in\psi(V^1\times V_C{}^{k-1})$ となる．よって $\psi(V^1\times\dot{V}_C{}^k)\subset\psi(V^1\times V_C{}^{k-1})$ である．また $\psi(\dot{V}^1\times V_C{}^k)=E$ であるから $\psi((V^1\times V_C{}^k)^{\cdot})\subset\psi(V^1\times V_C{}^{k-1})$ が示された．逆に $(t, \boldsymbol{x})=(t, (x_1,\cdots, x_{k-1}))\in V^1\times V_C{}^{k-1}$ に対して $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{x}, \sqrt{1-\|\boldsymbol{x}\|^2})\in\dot{V}_C{}^k$ を考えると $\psi(t, \boldsymbol{x})=\psi(t, \boldsymbol{a})\in\psi(V^1\times\dot{V}_C{}^k)\subset\psi((V^1\times V_C{}^k)^{\cdot})$ となる．よって $\psi((V^1\times V_C{}^k)^{\cdot})=\psi(V^1\times V_C{}^{k-1})$ である．$E(CP(n-1))$ においては

$$\psi((V^1\times V_C{}^k)^{\cdot})=e^0\cup e^1\cup e^3\cup\cdots\cup e^{2k-1}$$

がなりたつ(156 頁)から，これに埋め込み $f: E(CP(n-1)) \to U(n)$ を施すと $\phi((V^1 \times V_C{}^k)^\cdot) = e^0 \cup e^1 \cup e^3 \cup \cdots \cup e^{2k-1}$ を得る．最後に $\phi(V^1 \times V_C{}^{k-1}) = \overline{e^{2k-1}}$ であることは補題 109 である．

（2） $k' < k$ と仮定しておいてよい．$(t, x) \in E^1 \times E_C{}^{k-1}$ に対して $\kappa = e^{\pi i(t+1)}$, $a = (x, \sqrt{1-\|x\|^2}) \in S_C{}^{k-1}$ とおくとき $\phi(t, x) = D_{(\kappa, a)}$ (151 頁) である．また $(s, y) \in E^1 \times E_C{}^{k'-1}$ に対して $\phi(s, y) = B$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}\phi(s, y)\phi(t, x) &= BD_{(\kappa, a)} = BD_{(\kappa, a)}B^{-1}B = D_{(\kappa, Ba)}B \qquad (\text{補題 } 116\,(3))\\ &= \phi(t, Bx)\phi(s, y) \in e^{2k-1}e^{2k'-1}\end{aligned}$$

となる．よって $e^{2k'-1}e^{2k-1} \subset e^{2k-1}e^{2k'-1}$ である．逆に $e^{2k'-1}e^{2k-1} \subset e^{2k-1}e^{2k'-1}$ であることも

$$\begin{aligned}\phi(t, x)\phi(s, y) &= D_{(\kappa, a)}B = BB^{-1}D_{(\kappa, a)}B = BD_{(\kappa, B^{-1}a)}\\ &= \phi(s, y)\phi(t, B^{-1}x) \in e^{2k'-1}e^{2k-1}\end{aligned}$$

よりよい．よって (2) が示された．

（3） (補題 127 (3)参照) $\overline{e^{2k-1}}\,\overline{e^{2k-3}} \subset \overline{e^{2k-1}}\,\overline{e^{2k-1}}$ は明らかであるから $\overline{e^{2k-1}}\,\overline{e^{2k-1}} \subset \overline{e^{2k-1}}\,\overline{e^{2k-3}}$ を示そう．そのためには $e^{2k-1}e^{2k-1} \subset \overline{e^{2k-1}}\,\overline{e^{2k-3}}$ を示すと十分である．$(t, x) = (t, (x_1, \cdots, x_{k-1})) \in V^1 \times V_C{}^{k-1}$, $(s, y) = (s, (y_1, \cdots, y_{k-1})) \in V^1 \times V_C{}^{k-1}$ に対して

$$\phi(t, x) = A = \left(\delta_{ij} + \nu x_i \bar{x}_j\right),\ x_k = \sqrt{1-\|x\|^2},\ \nu = e^{\pi i(t+1)} - 1$$

$$\phi(s, y) = B = \left(\delta_{ij} + \mu y_i \bar{y}_j\right),\ y_k = \sqrt{1-\|y\|^2},\ \mu = e^{\pi i(s+1)} - 1$$

とおく．$x = y$, $\nu = \bar{\mu}$ のときには $AB = AA^* = E \in \overline{e^{2k-1}}\,\overline{e^{2k-3}}$ であるからそうでないとしておく．$\lambda \in C$, $\lambda + \bar{\lambda} + |\lambda|^2 = 0$, $u_k > 0$ を

$$\lambda u_k{}^2 = \nu x_k{}^2 + \mu y_k{}^2 + \nu\mu x_k y_k r, \qquad r = \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i y_i$$

より求める (補題 117 の証明参照)．実際，もし

$$\nu x_k{}^2 + \mu y_k{}^2 + \nu\mu x_k y_k r = 0 \qquad (\text{i})$$

とすると，さらに ($p_k(AB) = e_k$ である)．

$$\nu x_i x_k + \mu y_i y_k + \nu\mu x_i y_k r = 0, \qquad i = 1, \cdots, k-1 \qquad (\text{ii})$$

となる．(i) $\times\, x_i$ − (ii) $\times\, x_k$ を計算すると

$$\frac{x_i}{x_k} = \frac{y_i}{y_k}, \qquad i = 1, \cdots, k-1, k \qquad (\text{iii})$$

を得る．(iii) より $\dfrac{1}{x_k{}^2} = \sum_{i=1}^{k}\left|\dfrac{x_i}{x_k}\right|^2 = \sum_{i=1}^{k}\left|\dfrac{y_i}{y_k}\right|^2 = \dfrac{1}{y_k{}^2}$, となるから $x_k = y_k$, 再び (iii)

より $x_i=y_i,\ i=1,\cdots,k$ となる．すなわち $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ となる．このとき (i) より $\nu+\mu+\nu\mu=0$ ($r=1$ であることに注意) となる．ゆえに $(\nu+1)(\mu+1)=1$，すなわち $\nu=\bar{\mu}$ となるので仮定に反する．したがって λ と $u_k>0$ が求められるのである．つぎに

$$\lambda u_i u_k=\nu x_i x_k+\mu y_i y_k+\nu\mu x_i y_k r, \qquad i=1,\cdots,k-1$$

より $u_1,\cdots,u_{k-1}$ を求める．また $\kappa\in C,\ \kappa+\bar{\kappa}+|\kappa|^2=0,\ v_1,\cdots,v_{k-2},\ v_{k-1}\in C$ ($v_{k-1}>0$) を

$$\kappa v_i v_{k-1}=\frac{1}{\lambda u_k{}^2}\nu\mu(x_i y_k-y_i x_k)\overline{(x_{k-1}y_k-y_{k-1}x_k)}, \qquad i=1,\cdots,k-1$$

より求める．($v_{k-1}=0$ のことも起こるが，このときには大きいほうから数えて初めて $x_l y_k-y_l x_k\neq 0$ となる l をとり，v_{k-1} の代りに v_l を用いて同様なことを行なうとよい ($e^{2k-1}e^{2k-1}\subset e^{2k-1}e^{2l+1}$ となる) ので $v_{k-1}\neq 0$ としておく)．このとき

$$\lambda u_i\bar{u}_j=\frac{\lambda u_i u_k\overline{\lambda u_j u_k}}{\bar{\lambda}u_k{}^2}=\frac{1}{\bar{\lambda}u_k{}^2}(\nu x_i x_k+\mu y_i y_k+\nu\mu x_i y_k r)\overline{(\nu x_j x_k+\mu y_j y_k+\nu\mu x_j y_k r)}$$

$$\kappa v_i\bar{v}_j=\frac{\kappa v_i v_{k-1}\overline{\kappa v_j v_{k-1}}}{\bar{\kappa}v_{k-1}{}^2}=\frac{1}{\lambda u_k{}^2}\nu\mu(x_i y_k-y_i x_k)\overline{(x_j y_k-y_j x_k)}$$

となる．これを用いて

$$\Big(\delta_{ij}+\lambda u_i\bar{u}_j\Big)\begin{pmatrix}\delta_{ij}+\kappa v_i\bar{v}_j & \\ & 1\end{pmatrix}=\Big(\delta_{ij}+\lambda u_i\bar{u}_j+\kappa v_i\bar{v}_j+\lambda\kappa\sum_{m=1}^{k}u_i\bar{u}_m v_j\bar{v}_m\Big)$$

(ただし $v_k=0$ と約束する) の右辺を計算すると (計算は省略する)

$$\cdots=\Big(\delta_{ij}+\nu x_i\bar{x}_j+\mu y_i\bar{y}_j+\nu\mu x_i y_j r\Big)=\Big(\delta_{ij}+\nu x_i\bar{x}_j\Big)\Big(\delta_{ij}+\mu y_i\bar{y}_j\Big)=AB$$

となる．ゆえに $a,b\in V^1$ を $e^{\pi i(a+1)}-1=\nu,\ e^{\pi i(b+1)}-1=\mu$ となるようにとり，$\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_{k-1})\in E_C{}^{k-1},\ \boldsymbol{v}=(v_1,\cdots,v_{k-2})\in E_C{}^{k-2}$ とおくと ($v_{k-1}\neq 0$ の条件のもとに) $AB=\phi(a,\boldsymbol{u})\phi(b,\boldsymbol{v})\in e^{2k-1}e^{2k-3}$ となる．また $\phi: V^1\times V_C{}^0\to U(n),\ \phi(t,0)=1+(e^{\pi i(t+1)}-1)1=e^{\pi i(t+1)}$ であるから $\overline{e^1}=e^0\cup e^1=S_C{}^0=U(1)$ となるので $\overline{e^1}\,\overline{e^1}=U(1)U(1)=U(1)=\overline{e^1}$ である．よって (3) が証明された．

この補題を用いると $O(n)$ のとき (定理 32) と同様にしてつぎの定理を得る．

定理 36. ユニタリ群 $U(n)$ は $e^0=E$ (単位行列)，$e^{2k_1-1,\cdots,2k_m-1}$，$n\geqq k_1>\cdots>k_m\geqq 1$ の 2^n 個の胞体よりなる有限 CW 複体である．さらに $U(k)$，($1\leqq k<n$) は $U(n)$ の部分複体である．

写像 $s=f_n\phi_n h_n{}^{-1}: S_C{}^{n-1}-e_n\to U(n)$ は連続であって $ps=1$ をみたしている．この写像 s の形を具体的にかいておこう．

$$s: S_C{}^{n-1} - e_n \xrightarrow{h_n{}^{-1}} E^1 \times E_C{}^{n-1} \xrightarrow{\phi_n} E(CP(n-1)) \xrightarrow{f_n} U(n)$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \xrightarrow{h_n{}^{-1}} (t, \begin{pmatrix} \dfrac{-a_1(1-\bar{a}_n)}{\sqrt{2\mathrm{Re}(1-a_n)}\,|1-a_n|} \\ \vdots \\ \dfrac{-a_{n-1}(1-\bar{a}_n)}{\sqrt{2\mathrm{Re}(1-a_n)}\,|1-a_n|} \end{pmatrix})$$

$$a_n \neq 1$$

(ただし $e^{\pi i(t+1)} = -\dfrac{1-a_n}{1-\bar{a}_n}$ (補題 117) とする)

$$\xrightarrow{\phi_n} [t, \begin{pmatrix} \dfrac{a_1\bar{a}_1}{2\mathrm{Re}(1-a_n)} \cdots \dfrac{a_1\bar{a}_{n-1}}{2\mathrm{Re}(1-a_n)} & \dfrac{-a_1(1-\bar{a}_n)}{2\mathrm{Re}(1-a_n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{a_{n-1}\bar{a}_1}{2\mathrm{Re}(1-a_n)} \cdots \dfrac{a_{n-1}\bar{a}_{n-1}}{2\mathrm{Re}(1-a_n)} & \dfrac{-a_{n-1}(1-\bar{a}_n)}{2\mathrm{Re}(1-a_n)} \\ \dfrac{(1-a_n)\bar{a}_1}{2\mathrm{Re}(1-a_n)} \cdots \dfrac{(1-a_n)\bar{a}_{n-1}}{2\mathrm{Re}(1-a_n)} & \dfrac{|1-a_n|^2}{2\mathrm{Re}(1-a_n)} \end{pmatrix}]$$

$$\xrightarrow{f_n} \begin{pmatrix} 1-\dfrac{a_1(1-a_n)\bar{a}_1}{|1-a_n|^2} & \cdots & -\dfrac{a_1(1-a_n)\bar{a}_{n-1}}{|1-a_n|^2} & a_1 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ -\dfrac{a_{n-1}(1-a_n)\bar{a}_1}{|1-a_n|^2} & \cdots & 1-\dfrac{a_{n-1}(1-a_n)\bar{a}_{n-1}}{|1-a_n|^2} & a_{n-1} \\ \dfrac{(1-a_n)^2\bar{a}_1}{|1-a_n|^2} & \cdots & \dfrac{(1-a_n)^2\bar{a}_{n-1}}{|1-a_n|^2} & a_n \end{pmatrix}$$

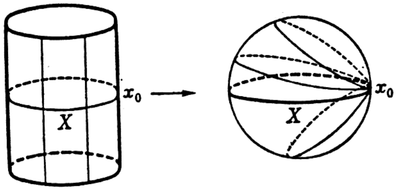
$$= s(\boldsymbol{a})$$

(4) 約懸垂空間

定義　X を位相空間とし，X の1点 x_0 を固定しておく．直積空間 $V^1 \times X$ において $-1 \times X \cup 1 \times X \cup V^1 \times x_0$ を一点に縮めた空間

$$(V^1 \times X)/(-1 \times X \cup 1 \times X \cup V^1 \times x_0)$$

を $S(X)$ で表わし，X の（x_0 を基点とする）**約懸垂空間**という．点 $(t, x) \in V^1 \times X$ を含む類を $[t, x]$ で表わす．



$V^1 \times X$　　　　$S(X)$

例 138.　1点 x_0 からなる空間の約懸垂空間 $S(x_0)$ はまた1点である．

例 139. $S^0=\{-1,1\}$ の (1を基点とする) 約懸垂空間 $S(S^0)$ は S^1 と同相である：$S(S^0)\simeq S^1$. 実際, 写像 $f: V^1\times S^0\to S^1$ を $f(t,-1)=e^{\pi i(t+1)}$, $f(t,1)=1$ と定義すると f は同相写像 $\bar{f}: S(S^0)\to S^1$ を誘導することが容易にわかる.

定理 37. $S(CP(n-1))$ を射影空間 $CP(n-1)$ の ($CP(0)$ を基点とする) 約懸垂空間とするとき, 写像 $g: S(CP(n-1))\to SU(n)$

$$g([t,X])=(E+(e^{\pi i(t+1)}-1)X)\begin{pmatrix} e^{-\pi i(t+1)} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

は単射同相写像である. したがって $S(CP(n-1))$ とその g による像を同一視すると埋め込み

$$S(CP(n-1))\subset SU(n)$$

を得る.

証明 写像 $\tilde{g}: V^1\times CP(n-1)\to SU(n)$ を

$$\tilde{g}(t,X)=(E+(\kappa-1)X)\begin{pmatrix} \kappa^{-1} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix},\qquad \kappa=e^{\pi i(t+1)}$$

と定義する. ($\det(E+(\kappa-1)X)=\kappa$ である (補題 116 (2)) から $\tilde{g}(t,X)\in SU(n)$ である). 任意の $t\in V^1$, $X\in CP(n-1)$ に対して

$$\tilde{g}(-1,X)=\tilde{g}(1,X)=\tilde{g}(t,CP(0))=E$$

であるから $\tilde{g}$ は連続写像 $g: S(CP(n-1))\to SU(n)$, $g([t,X])=\tilde{g}(t,X)$ を誘導する (補題 76). g は単射である. 実際, $\tilde{g}(t,X)=\tilde{g}(s,Y)$ とすると, $\kappa=e^{\pi i(t+1)}$, $\lambda=e^{\pi i(s+1)}$ とおいて

$$\begin{array}{ccc} V^1\times CP(n-1) & & \\ \downarrow & \searrow^{\tilde{g}} & \\ S(CP(n-1)) & \xrightarrow{g} & SU(n)\end{array}$$

$$(E+(\kappa-1)X)\begin{pmatrix} \kappa^{-1} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}=(E+(\lambda-1)Y)\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}\qquad \text{(i)}$$

である. X, Y の対角線の成分をそれぞれ $\xi_1,\cdots,\xi_n$; $\eta_1,\cdots,\eta_n$ とするとき, 上式の対角線の成分を比較して

$$\begin{cases} (1+(\kappa-1)\xi_1)\kappa^{-1}=(1+(\lambda-1)\eta_1)\lambda^{-1} & \text{(ii)}\\ 1+(\kappa-1)\xi_i=1+(\lambda-1)\eta_i, \quad i=2,\cdots,n & \text{(iii)}\end{cases}$$

を得る．しかるに $\sum_{i=2}^{n}\xi_i=1-\xi_1,\ \sum_{i=2}^{n}\eta_i=1-\eta_1$ であるから (iii) を加えて

$$(\kappa-1)(1-\xi_1)=(\lambda-1)(1-\eta_1)$$

すなわち

$$\kappa-(\kappa-1)\xi_1=\lambda-(\lambda-1)\eta_1 \tag{iv}$$

を得る．また (ii) 式を $\kappa\lambda$ 倍すると

$$\lambda+\lambda(\kappa-1)\xi_1=\kappa+\kappa(\lambda-1)\eta_1 \tag{v}$$

となる．(iv)＋(v) をつくり移項すると

$$(\kappa-1)(\lambda-1)(\xi_1-\eta_1)=0 \tag{vi}$$

となる．g が単射であることを示すにははじめから $t, s\neq\pm1$，すなわち $\kappa, \lambda\neq1$ としておいてよいから (vi) より $\xi_1=\eta_1$ を得る．これを (iv) に代入すると

$$(\kappa-\lambda)(1-\xi_1)=0$$

となる．$\kappa=\lambda$ のときは (i) より $X=Y$ を得る．$\xi_1=\eta_1=1$ のときは（一般に $X\in KP(n-1)$ の対角線の各成分 $\geqq 0$ である）$\sum_{i=2}^{n}\xi_i=1-\xi_1=0,\ \sum_{i=2}^{n}\eta_i=1-\eta_1=0$ より $\xi_2=\cdots=\xi_n=0,\ \eta_2=\cdots=\eta_n=0$ となる．したがって，このときには $X=Y=CP(0)$ となるが，これは1点に縮める部分に属している．以上で g が単射であることがわかった（補題2(2)）．$V^1\times CP(n-1)$ はコンパクトであるから $S(CP(n-1))$ もコンパクトであり（命題75(1)），$SU(n)$ は Hausdorff 空間であるから g は単射同相写像である（命題50）．

命題 121. $S(CP(n-1))$ は $e^0, e^3, e^5, \cdots, e^{2n-1}$ の n 個の胞体からなる有限 CW 複体である．

証明 $e^0=S(CP(0))$，$e^{2k-1}=S(CP(k-1))-S(CP(k-2))$，$k=2,\cdots,n$ とおく．e^{2k-1} が $S(CP(n-1))$ の $2k-1$ 次元の胞体であることを示すためにその特性写像 ϕ_k を与えよう．写像 $\phi_k: V^1\times V_C{}^{k-1}\xrightarrow{1\times\varphi}V^1\times CP(n-1)\xrightarrow{q}S(CP(n-1))$ を

$$\phi_k(t, x)=q(t, \varphi(x))=[t, \varphi(x)]$$

と定義する．ここに $\varphi: V_C{}^{k-1}\to CP(n-1)$ は $CP(n-1)$ の $2k-2$ 次元胞体 e^{2k-2} を定義するために用いた写像であり（定理31），$q: V^1\times CP(n-1)\to S(CP(n-1))$ は射影とする．この ϕ_k が同相写像 $\phi_k: E^1\times E_C{}^{k-1}\to e^{2k-1}$ を誘導することなどは命題118と全く同じである．($E(CP(n-1))$ で1次元胞体 e^1 が現われるが $S(CP(n-1))$ は現われない理由は例136と例138の相異にある）．なお

$$\phi_k((V^1\times V^{k-1})^{\cdot})=S(CP(k-2))=e^0\cup e^3\cup\cdots\cup e^{2k-3}$$

がなりたつことを注意しておく.

(5) 特殊ユニタリ群の胞体分割

埋め込み $S(CP(n-1)) \subset SU(n)$ (定理37) と $S(CP(n-1))$ の胞体分割 $S(CP(n-1)) = e^0 \cup e^3 \cup e^5 \cup \cdots \cup e^{2n-1}$ (命題121) を用いると, $SU(n)$ の胞体分割が得られる. 方法は $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ と同じであるので, つぎの補題122, 123があれば十分であることがわかるだろう.

e^{2k-1}, $k=2, \cdots, n$ を命題121で与えた胞体とし, e^{2k-1} の写像 $g: S(CP(n-1)) \to SU(n)$ (定理37) による像を同じ記号 e^{2k-1} で表わす. さらに

$$e^{2k_1-1, \cdots, 2k_m-1} = e^{2k_1-1} \cdots e^{2k_m-1}$$

と定義する.

補題 122. $n \geqq k_1 > \cdots > k_m \geqq 2$ ならば $e^{2k_1-1, \cdots, 2k_m-1}$ は $SU(n)$ の $(2k_1-1) + \cdots + (2k_m-1)$ 次元胞体である.

補題 123. $SU(n)$ の胞体 e^{2k-1} に対してつぎの (1), (2), (3) がなりたつ ($\psi' = g\phi$ とする).

(1) $\psi_{k-1}'((V^1 \times V_C{}^k)^\cdot) = \psi_k'(V^1 \times V_C{}^{k-1}) = \overline{e^{2k-1}} = e^0 \cup e^3 \cup \cdots \cup e^{2k-1}$

(2) $e^{2k'-1}e^{2k-1} = e^{2k-1}e^{2k'-1}$

(3) $\overline{e^{2k-1}}\,\overline{e^{2k-1}} = \overline{e^{2k-1}}\,\overline{e^{2k-3}}$

証明 (1), (2), (3) は同様な証明であるので (3) のみを示そう. $A, B \in \overline{e^{2k-1}}$ は $A = A_1T_1$, $B = B_1T_2$; A_1, $B_1 \in \overline{e_{U(n)}{}^{2k-1}}$, $T_1 = \det A_1{}^{-1} \in U(1)$, $T_2 = \det B_1{}^{-1} \in U(1)$ と表わされる. $T_1B_1T_1{}^{-1} \in \overline{e_{U(n)}{}^{2k-1}}$ であるから, A_1, $T_1B_1T_1{}^{-1}$ に対して $A_1T_1B_1T_1{}^{-1} = C_1D_1$ をみたす $C_1 \in \overline{e_{U(n)}{}^{2k-1}}$, $D_1 \in \overline{e_{U(n)}{}^{2k-3}}$ が存在する (補題120 (3)). また $T_3 = \det C_1{}^{-1} \in U(1)$ とおく. このとき

$$\begin{aligned} AB &= A_1T_1B_1T_2 = A_1T_1B_1T_1{}^{-1}T_1T_2 = C_1D_1T_1T_2 \\ &= (C_1T_3)((T_3{}^{-1}D_1T_3)T_3{}^{-1}T_1T_2) \in \overline{e^{2k-1}}\,\overline{e^{2k-3}} \end{aligned}$$

となるから $\overline{e^{2k-1}}\,\overline{e^{2k-1}} \subset \overline{e^{2k-1}}\,\overline{e^{2k-3}}$ が示された. 逆の包含関係は自明である.

定理 38. 特殊ユニタリ群 $SU(n)$ は $e^0 = E$ (単位行列), $e^{2k_1-1, \cdots, 2k_m-1}$, $n \geqq k_1 > \cdots > k_m \geqq 2$ の 2^{n-1} 個の胞体よりなる有限 CW 複体である. さらに $SU(k)$ $(1 \leqq k < n)$ は $SU(n)$ の部分複体である.

なお $s = g_n\phi_nh_n{}^{-1}: S_C{}^{n-1} - e_n \to SU(n)$ (h_n は $U(n)$ のときに用いた写像) は連続写像であって, かつ $p_ns = 1$ をみたしていることを注意しておく.

§5. シンプレクティック群の胞体

シンプレクティック群 $Sp(n)$ についても $O(n)$, $U(n)$ と同様な方法でその胞体分割を与えることができる．しかし，$O(n)$ の胞体が $RP(n-1)$ の胞体と，$U(n)$ の胞体が $CP(n-1)$ の準懸垂空間 $E(CP(n-1))$ の胞体と密接に関係したが，$Sp(n)$ の胞体は $HP(n-1)$ とは（自然な方法で）直接には関係づけることができない．

(1) 拡張された反射行列

定義

$$\kappa \in S_H{}^0,\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in S_H{}^{n-1} \text{ とする．} D = D_{(\kappa,\boldsymbol{a})} \in M(n, \boldsymbol{H}) \text{ を}$$

$$D = \left(\delta_{ij} + a_i(\kappa - 1)\bar{a}_j\right)_{i,j=1,\cdots,n}$$

と定義し，$(\kappa, \boldsymbol{a})$ **に関する拡張された反射行列**という．

補題 124. $D = D_{(\kappa,\boldsymbol{a})} \in M(n, \boldsymbol{H})$ を $(\kappa, \boldsymbol{a}) \in S_H{}^0 \times S_H{}^{n-1}$ に関する拡張された反射行列とするとき，つぎの (1), (2) がなりたつ．

(1)　$D \in Sp(n)$

(2)　$AD_{(\kappa,\boldsymbol{a})}A^{-1} = D_{(\kappa, A\boldsymbol{a})}$,　$A \in Sp(n)$

証明　(1)　$\nu = \kappa - 1$ とおくと，$|\kappa| = 1$ より $\nu + \bar{\nu} + |\nu|^2 = 0$ である．さて $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ とすると

$$\begin{aligned}
DD^* &= \left(\delta_{ij} + a_i\nu\bar{a}_j\right)\left(\delta_{jk} + a_j\nu\bar{a}_k\right)^* = \left(\delta_{ij} + a_i\nu\bar{a}_j\right)\left(\delta_{jk} + a_j\bar{\nu}\bar{a}_k\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} + a_i\nu\bar{a}_j)(\delta_{jk} + a_j\bar{\nu}\bar{a}_k)\right) \\
&= \left(\delta_{ik} + a_i\nu\bar{a}_k + a_i\bar{\nu}\bar{a}_k + a_i\nu\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j a_j\right)\bar{\nu}\bar{a}_k\right) \\
&= \left(\delta_{ik} + a_i(\nu + \bar{\nu} + \nu\bar{\nu})\bar{a}_k\right) = \left(\delta_{ik}\right) = E
\end{aligned}$$

であるから $D \in Sp(n)$ である．

(2)　$A = \left(a_{ij}\right)$ とするとき $A^{-1} = A^*$ であるから

$$\begin{aligned}
AD_{(\kappa,\boldsymbol{a})}A^{-1} \text{ の } (i, j)\text{-成分} &= \sum_{k,l} a_{ik}(\delta_{kl} + a_k(\kappa - 1)\bar{a}_l)\bar{a}_{jl} \\
&= \delta_{ij} + \left(\sum_k a_{ik}a_k\right)(\kappa - 1)\overline{\left(\sum_l a_{jl}a_l\right)} = D_{(\kappa, A\boldsymbol{a})} \text{ の } (i, j)\text{-成分}
\end{aligned}$$

となる．

補題 125.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in S_H{}^{n-1} \text{ が } \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{e}_n \text{ であるならば，}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(\kappa-1)\bar{x}_n \\ \vdots \\ x_{n-1}(\kappa-1)\bar{x}_n \\ 1+x_n(\kappa-1)\bar{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

をみたす $\kappa \in S_H{}^0$ と $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in S_H{}^{n-1}$ が存在する．さらに $x_n > 0$ を仮定すると κ, x は a に対して一意に定まる．

証明　$x_n > 0$ のもとに解くと，補題117と同様にして，$\kappa = -(1-a_n)(1-\bar{a}_n)^{-1}$，$x_k = -\dfrac{a_k(1-\bar{a}_n)}{\sqrt{2\mathrm{Re}(1-a_n)}\,|1-a_n|}$，$k=1,\cdots,n-1$，$x_n = \dfrac{|1-a_n|}{\sqrt{2\mathrm{Re}(1-a_n)}}$ を得る．

定理24, 34と同様につぎの定理を得る．

定理39.　シンプレクティック群 $Sp(n)$ は拡張された反射行列により生成される．すなわち任意のシンプレクティック行列 $A \in Sp(n)$ に対して，有限個の拡張された反射行列 $D_1, \cdots, D_m$ が存在し，A はその積で表わされる：$A = D_1 \cdots D_m$.

（2） シンプレクティック群の胞体分割

集合 $\{q \in H \mid \mathrm{Re}\, q = 0,\ |q| \leqq 1\}$ は3次元単位閉胞体であるから，ここではこれを V^3 で表わし，また $E^3 = \{q \in V^3 \mid |q| < 1\}$，$\dot{V}^3 = \{q \in V^3 \mid |q| = 1\}$ とおく．さて写像 ϕ_k：$V^3 \times V_H{}^{k-1} \to Sp(k) \subset Sp(n)$ を

$$\phi_k(q, (x_1, \cdots, x_{k-1})) = \left(\delta_{ij} + x_i \nu \bar{x}_j\right)_{i,j=1,\cdots,k}$$

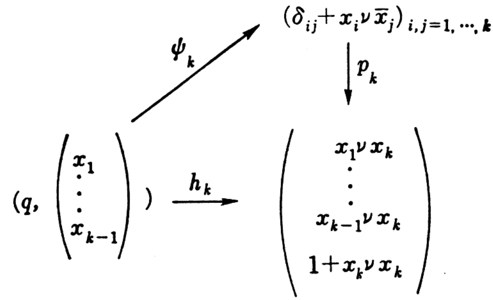
と定義する．ただし $\nu = 2\sqrt{1-|q|^2}\,(q - \sqrt{1-|q|^2})$，$x_k = \sqrt{1-|x_1|^2 - \cdots - |x_{k-1}|^2}$ とする．このとき $\nu + \bar{\nu} + \nu\bar{\nu} = 0$，$\sum_{i=1}^{k} |x_i|^2 = 1$ であるから $\phi_k(q, (x_1, \cdots, x_{k-1})) \in Sp(k)$ であることが補題124 (1) よりわかる．

$\phi_k(E^3 \times E_H{}^{k-1}) = e^{4k-1}$ とおく．さらに

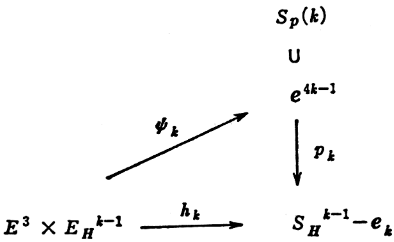
$$e^{4k_1-1, \cdots, 4k_m-1} = e^{4k_1-1} \cdots e^{4k_m-1}$$

と定義する．$e^{4k_1-1,\cdots,4k_m-1}$ が $Sp(n)$ の胞体であることを示すためにつぎの3つの写像を用いよう．

$$\begin{aligned} p_k : Sp(k) &\to S_H{}^{k-1},\ p_k(A) = Ae_k \\ h_k : V^3 \times V_H{}^{k-1} &\to S_H{}^{k-1} \\ \phi_k : V^3 \times V_H{}^{k-1} &\to Sp(k) \end{aligned}$$



$(\nu = 2\sqrt{1-|q|^2}(q-\sqrt{1-|q|^2}),\ x_k = \sqrt{1-|x_1|^2-\cdots-|x_{k-1}|^2})$. この p_k, h_k, ψ_k を e^{4k-1}, $E^3\times E_H{}^{k-1}$, $E^3\times E_H{}^{k-1}$ に制限すると同相写像である．(h_k の逆写像が連続であることは補題125の証明における κ, x の形より明らかである)．



において，写像を1周させると恒等写像になっているから，上図の ψ_k, $(p_k, h_k{}^{-1})$ が同相写像であることがわかると同時に，e^{4k-1} が $Sp(n)$ の $4k-1$ 次元の胞体であることもわかる．さらに上記の写像の図形を用いると $O(n)$ のとき（補題112）と同様にするとつぎの補題を得る．

補題 126. $n\geqq k_1>\cdots>k_m\geqq 1$ ならば $e^{4k_1-1,\cdots,4k_m-1}$ は $Sp(n)$ の $(4k_1-1)+\cdots+(4k_m-1)$ 次元胞体である．

補題 127. $Sp(n)$ の胞体 e^{4k-1} に対してつぎの (1), (2), (3) がなりたつ．

(1) $\psi_{k+1}((V^3\times V_H{}^k)^{\cdot}) = \psi_k(V^3\times V_H{}^{k-1}) = \overline{e^{4k-1}} = e^0\cup e^3\cup e^7\cup\cdots\cup e^{4k-1}$

(2) $e^{4k'-1}e^{4k-1} = e^{4k-1}e^{4k'-1}$

(3) $\overline{e^{4k-1}}\,\overline{e^{4k-1}} = \overline{e^{4k-1}}\,\overline{e^{4k-5}}$　$(k\geqq 2)$,　　$\overline{e^3}\,\overline{e^3} = \overline{e^3}$

証明 (1) まず $\psi((V^3\times V_H{}^k)^{\cdot})\subset\psi(V^3\times V_H{}^{k-1})$ を示そう．$(q, a) = (q, (a_1, \cdots,$

$a_{k-1}, a_k)) \in V^3 \times \dot{V}_H{}^k$ に対して $\nu = 2\sqrt{1-|q|^2}(q-\sqrt{1-|q|^2})$ とおき，かつ $a_k = a_{k-1} = \cdots = a_{l+1} = 0$, $a_l \neq 0$ であるとする．さて $p \in V^3$ を $2\sqrt{1-|p|^2}(p-\sqrt{1-|p|^2}) = \dfrac{a_l\nu\bar{a}_l}{|a_l|^2}$ をみたすようにとり（$\nu \neq 0$ ならば p は $\dfrac{a_l\nu\bar{a}_l}{|a_l|^2}$ に対してただ1つ定まる），$x = \left(\dfrac{a_1\bar{a}_l}{|a_l|}, \cdots, \dfrac{a_{l-1}\bar{a}_l}{|a_l|}\right) \in V_H{}^{l-1} \subset V_H{}^{k-1}$ とおくと $\phi(q, a) = \phi(p, x) \in \phi(V^3 \times V_H{}^{k-1})$ となる．よって $\phi(V^3 \times \dot{V}_H{}^k) \subset \phi(V^3 \times V_H{}^{k-1})$ である．また $\phi(\dot{V}^3 \times V_H{}^k) = E$(単位行列)であるから $\phi((V^3 \times V_H{}^k)^\cdot) \subset \phi(V^3 \times V_H{}^{k-1})$が示された．逆に$(q, x) = (q, (x_1, \cdots, x_{k-1})) \in V^3 \times V_H{}^{k-1}$ に対して $a = (x, \sqrt{1-\|x\|^2}) \in \dot{V}_H{}^k$ を考えると $\phi(q, x) = \phi(q, a) \in \phi(V^3 \times \dot{V}_H{}^k) \subset \phi((V^3 \times V_H{}^k)^\cdot)$ となる． よって $\phi((V^3 \times V_H{}^k)^\cdot) = \phi(V^3 \times V_H{}^{k-1})$ である．つぎに k に関する帰納法により

$$\phi((V^3 \times V_H{}^{k-1})^\cdot) = e^0 \cup e^3 \cup \cdots \cup e^{4k-5}$$

であると仮定する．このとき $\phi(V^3 \times V_H{}^{k-1}) = \phi((V^3 \times V_H{}^{k-1})^\cdot \cup (E^3 \times E_H{}^{k-1})) = \phi((V^3 \times V_H{}^{k-1})^\cdot) \cup \phi((E^3 \times E_H{}^{k-1})) = e^0 \cup e^3 \cup \cdots \cup e^{4k-5} \cup e^{4k-1}$ となる．最後に $\phi(V^3 \times V_H{}^{k-1}) = \overline{e^{4k-1}}$ であることは補題109である．

(2) の証明は補題120 (2) と同様であるから省略する．

(3) $k=1$ のとき $\phi: V^3 \times V_H{}^0 \to Sp(n)$, $\phi(q, 0) = 1 + 2\sqrt{1-|q|^2}(q-\sqrt{1-|q|^2})$ であるから $\overline{e^3} = e^0 \cup e^3 = S_H{}^0 = Sp(1)$ となる． よって $\overline{e^3}\,\overline{e^3} = Sp(1)Sp(1) = Sp(1) = \overline{e^3}$ である．つぎに $k=2$ のとき $\overline{e^7}\,\overline{e^3} = Sp(2)$ となる．実際，$\overline{e^7} \subset Sp(2)$, $\overline{e^3} = Sp(1) \subset Sp(2)$ であるから $\overline{e^7}\,\overline{e^3} \subset Sp(2)$ は自明である． 逆に元 $A \in Sp(2)$ をとる． $A \in Sp(1)$ ならば $A \in Sp(1) = \overline{e^3} \subset \overline{e^7}\,\overline{e^3}$ であるから $A \notin Sp(1)$ としよう．このとき $p_2(A) \neq \boldsymbol{e}_2$ であるから $\phi_2 h_2{}^{-1} p_2(A) = A_1$ とおくとき $A_1 \in e^7$ である． このとき $p_2(A_1) = p_2(A)$ となるから $A_1{}^{-1}A \in Sp(1) = \overline{e^3}$ である． ゆえに $A = A_1(A_1{}^{-1}A) \in e^7\,\overline{e^3} \subset \overline{e^7}\,\overline{e^3}$ となる．したがって $Sp(2) \subset \overline{e^7}\,\overline{e^3}$ がわかり $Sp(2) = \overline{e^7}\,\overline{e^3}$ が示された． さて

$$Sp(2) = \overline{e^7}\,\overline{e^3} \subset \overline{e^7}\,\overline{e^7} \subset Sp(2)$$

となるので $\overline{e^7}\,\overline{e^3} = \overline{e^7}\,\overline{e^7}$ となり $k=2$ のとき (3) がなりたつことがわかった．任意の k のときは $k=2$ のときに帰着させよう．$\overline{e^{4k-1}}\,\overline{e^{4k-1}}$ の元

$$\phi(q, x)\phi(p, y) \in \overline{e^{4k-1}}\,\overline{e^{4k-1}}$$

$(q, x), (p, y) \in V^3 \times V_H{}^{k-1}$ を考えよう．W を x, y を含む H^{k-1} の2次元部分 H-右加群とする．$H^l \cap W = W_l$ とおくとき，包含関係 $0 \subset H \subset H^2 \subset \cdots \subset H^{k-1}$ (例57) より部分 H-右加群の列

$$0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_{k-1} = W$$

を得る．W_r が1次元 $\boldsymbol{H}$ - 右加群であるような $r(1 \leq r < k-1)$ をとる．また $A \in Sp(k-1)$ を $A(W) = \boldsymbol{H}^2$, $A(W_r) = \boldsymbol{H}^1$ となるように選ぶ．このとき

$$A\phi(q, \boldsymbol{x})\phi(p, \boldsymbol{y})A^{-1} = \phi(q, A\boldsymbol{x})\phi(p, A\boldsymbol{y})$$

となる（補題 124 (2)）．$k = 2$ のときには命題は正しいから，ある $q_1, p_1 \in V^3$, $\boldsymbol{x}_1 \in V_{\boldsymbol{H}}{}^2 \subset \boldsymbol{H}^2$, $\boldsymbol{y}_1 \in V_{\boldsymbol{H}}{}^1 \subset \boldsymbol{H}$ が存在して

$$A\phi(q, \boldsymbol{x})\phi(p, \boldsymbol{y})A^{-1} = \phi(q_1, \boldsymbol{x}_1)\phi(p_1, \boldsymbol{y}_1)$$

すなわち

$$\phi(q, \boldsymbol{x})\phi(p, \boldsymbol{y}) = \phi(q_1, A^{-1}\boldsymbol{x}_1)\phi(p_1, A^{-1}\boldsymbol{y}_1)$$

となる（補題 124 (2)）．A のとり方より $A^{-1}\boldsymbol{y}_1 \in W_r \subset \boldsymbol{H}^{k-2}$ であるから $A^{-1}\boldsymbol{y}_1 \in V_{\boldsymbol{H}}{}^{k-2}$ である．よって $\phi(q, \boldsymbol{x})\phi(p, \boldsymbol{y}) \in \overline{e^{4k-1}}\,\overline{e^{4k-5}}$ となり $\overline{e^{4k-1}}\,\overline{e^{4k-1}} \subset \overline{e^{4k-1}}\,\overline{e^{4k-5}}$ が示された．逆の包含関係は自明である．以上で補題が証明された．

この補題を用いると $Sp(n)$ の胞体分割が得られることは $O(n)$, $U(n)$ のときと同じである（定理 32）．

定理 40.　シンプレクティック群 $Sp(n)$ は $e^0 = E$, $e^{4k_1-1, \cdots, 4k_m-1}$, $n \geqq k_1 > \cdots > k_m \geqq 1$ の 2^n 個の胞体よりなる有限 CW 複体である．さらに $Sp(k)$ $(1 \leqq k < n)$ は $Sp(n)$ の部分複体である．

なお写像 $s = \phi_n h_n{}^{-1} : S_{\boldsymbol{H}}{}^{n-1} - \boldsymbol{e}_n \to Sp(n)$ は連続であって $p_n s = 1$ をみたしているがその具体的な形は $U(n)$ のときの s と同じである（160 頁）．

§6.　多　様　体

多様体を定義し，射影空間および古典群が多様体の構造をもつことを示そう．これらはいずれも可微分多様体であるが，まず位相多様体の定義からはじめよう．

(1)　位相多様体

X を位相空間とし，U を X の開集合とする．U から $\boldsymbol{R}^n$ のある開集合 U' への同相写像 $\varphi : U \to U'$ が存在するとき，U を（詳しくは (U, φ) を）X の n 次元**座標近傍**という．

定義　M を位相空間[†] とする．M に n 次元座標近傍 $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ からなる開被覆

$$M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

---

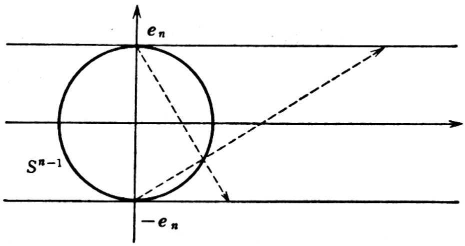
† 多様体というときには Hausdorff 空間と仮定することが多い．

が存在するとき，M を n 次元**位相多様体**という．

例 140.　$\boldsymbol{R}^n$ は n 次元位相多様体である．実際，$\boldsymbol{R}^n$ の座標近傍として $(\boldsymbol{R}^n, 1)$，恒等写像 $1: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ をとるとよい．したがって $\boldsymbol{C}^n$, $\boldsymbol{H}^n$, $M(n, \boldsymbol{R})$, $M(n, \boldsymbol{C})$, $M(n, \boldsymbol{H})$ はそれぞれ $2n$, $4n$, n^2, $2n^2$, $4n^2$ 次元位相多様体である．

$\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U は座標近傍として $(U, 1)$, 恒等写像 $1: U \to U$ をとると明らかに U は n 次元位相多様体である．したがって $GL(n, K)$ が $M(n, K)$ の開集合である（定理 8）のでつぎの定理を得る．

定理 41.　一般線形群 $GL(n, \boldsymbol{R})$, $GL(n, \boldsymbol{C})$, $GL(n, \boldsymbol{H})$ はそれぞれ n^2, $2n^2$, $4n^2$ 次元位相多様体である．



定理 42.　球面 S^{n-1} は $n-1$ 次元位相多様体である．

証明　$U_1 = S^{n-1} - e_n$,　$U_2 = S^{n-1} - (-e_n)$ とおくと U_1, U_2 は S^{n-1} の開集合であり，$S^{n-1} = U_1 \cup U_2$ である．各 U_i が $\boldsymbol{R}^{n-1}$ と同相であることを示すためにつぎの写像 φ_i, ψ_i $(i = 1, 2)$ を定義しよう．

$$U_1 \underset{\psi_1}{\overset{\varphi_1}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{R}^{n-1}$$

$$\varphi_1(a_1, \cdots, a_n) = \left(\frac{2a_1}{1-a_n}, \cdots, \frac{2a_{n-1}}{1-a_n}\right)$$

$$\psi_1(x_1, \cdots, x_{n-1}) = \left(\frac{4x_1}{4+\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}, \cdots, \frac{4x_{n-1}}{4+\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2},\ 1 - \frac{8}{4+\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}\right)$$

は連続写像であり，かつ $\psi_1\varphi_1 = 1$, $\varphi_1\psi_1 = 1$ であることが容易に確かめられる．よって，φ_1 は同相写像である．同様に

$$U_2 \underset{\psi_2}{\overset{\varphi_2}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{R}^{n-1}$$

$$\varphi_2(a_1, \cdots, a_n) = \left(\frac{2a_1}{1+a_n}, \cdots, \frac{2a_{n-1}}{1+a_n}\right)$$

$$\psi_2(x_1, \cdots, x_{n-1}) = \left(\frac{4x_1}{4+\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}, \cdots, \frac{4x_{n-1}}{4+\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2},\ \frac{8}{4+\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} - 1\right)$$

は連続写像であり $\psi_2\varphi_2 = 1$, $\varphi_2\psi_2 = 1$ をみたすから φ_2 は同相写像である．よって S^{n-1} は

$n-1$ 次元位相多様体の構造をもつことがわかった.

定理43. 射影空間 RP_{n-1}, CP_{n-1}, HP_{n-1} はそれぞれ $n-1$, $2n-2$, $4n-4$ 次元位相多様体である.

証明 $U_i=\{[a_1,\cdots,a_n]\in KP_{n-1}\,|\,(a_1,\cdots,a_n)\in S_K^{n-1},\ a_i\neq 0\}$, $i=1,\cdots,n$ とおくと, U_i は KP_{n-1} の開集合であり（定理19, 補題88）かつ $KP_{n-1}=\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ となる. 各 U_i が K^{n-1} ($\simeq R^{d(n-1)}$) と同相であることを示すためにつぎの写像 φ_i, ψ_i, $i=1,\cdots,n$ を定義しよう.

$$U_i \underset{\psi_i}{\overset{\varphi_i}{\rightleftarrows}} K^{n-1}$$

$$\varphi_i([a_1,\cdots,a_n])=(a_1a_i^{-1},\cdots,a_{i-1}a_i^{-1},a_{i+1}a_i^{-1},\cdots a_na_i^{-1})$$

$$\psi_i(x_1,\cdots,x_{n-1})=[x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_i,\cdots,x_{n-1}]$$

は連続写像であり（補題76）かつ $\psi_i\varphi_i=1$, $\varphi_i\psi_i=1$ であることが容易に確かめられる. よって φ_i は同相写像である. よって $KP(n-1)$ は $d(n-1)$ 次元位相多様体の構造をもつことがわかった.

定理44. 古典群 $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$, $SU(n)$ はそれぞれ $\dfrac{n(n-1)}{2}$, n^2, $n(2n+1)$, $\dfrac{n(n-1)}{2}$, n^2-1 次元位相多様体である.

証明 まず $G(n,K)$ のとき示そう. $G(n,K)$ の胞体分割（定理32, 36, 40）における最高次元の胞体 $e^{dn-1,d(n-1)-1,\cdots,d-1}$ は $G(n,K)$ の開集合である（補題111). これを U とおくと明らかに $G(n,K)$ の開被覆

$$G(n,K)=\bigcup_{A\in G(n,K)} UA$$

を得る. 各開集合 UA は U と同相であり U は $(dn-1)+(d(n-1)-1)+\cdots+(d-1)=\dfrac{dn(n+1)}{2}-n$ 次元の胞体であるから同次元のユークリッド空間の開集合と同相である. したがって $G(n,K)$ は $\dfrac{dn(n+1)}{2}-n$ 次元の位相多様体である. $SG(n,K)$ についてもその胞体分割（定理33, 38）を用いると上記と同様にして証明される.

$G(n,K)$ はコンパクトであるから, 開被覆 $G(n,K)=\bigcup_{A\in G(n,K)} UA$ より有限開被覆を選びだせるはずである. 具体的には

$$U_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n}=U\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n\end{pmatrix},\qquad \varepsilon_i=\pm 1$$

とおくと（この $U_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n}$ は 2^n 個ある）

$$G(n, K) = \bigcup_{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n} U_{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n}$$

となる．実際 n に関する帰納法で示そう．$n=1$ のときにはなりたつことが容易にわかるから，$G(n-1, K)$ ではなりたつと仮定する．すなわち $B \in G(n-1, K)$ ならば，$B \in e^{d(n-1)-1, \cdots, d-1}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_{n-1} \end{pmatrix}$ であるが，e^{dn-1} が $P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ を含んでいることに注意すると，$B = PBP \in e^{dn-1}e^{d(n-1)-1, \cdots, d-1}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \varepsilon_{n-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \varepsilon_{n-1} & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ となる．さて $A \in G(n, K)$ とするとき，$A \in G(n-1, K)$ ならば，A はある $U_{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}, -1}$ に含まれるから，$A \notin G(n-1, K)$ であるとしよう．このとき A は $A = DB$, $D \in e^{dn-1}$, $B \in G(n-1, K)$ と表わされる（定理32の証明）から B に帰納法の仮定を用いると

$$A = DB \in e^{dn-1}e^{d(n-1)-1, \cdots, d-1}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \varepsilon_{n-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = U_{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}, 1}$$

となる．以上で $G(n, K) = \bigcup_{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n} U_{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n}$ が証明された．

（2） 可 微 分 多 様 体

位相多様体 M の空間に滑らかさを要求した空間がつぎに定義する可微分多様体である．

定 義　n 次元位相多様体 M の座標近傍系 $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ を $U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ ならば

$$\varphi_\mu \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \longrightarrow \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

が無限回連続的微分可能であるように選ぶことができるとき M を n 次元 **可 微 分 多 様 体** という．また座標近傍系 $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ は M に **可 微 分 構 造** を与えるという．ここで $\varphi_\mu \varphi_\lambda^{-1}$ が無限回連続的微分可能の意味を少し説明しておこう．$\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ は $\boldsymbol{R}^n$ のある開集合であるから $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ の点 x は $\boldsymbol{R}^n$ における座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ をもつ．同様に $\varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合であるから $\varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ の点 $\varphi_\mu \varphi_\lambda^{-1}(x)$ は $\boldsymbol{R}^n$ における座標 $(y_1, \cdots, y_n)$ をもつ．そしてこのとき各 y_i は $x_1, \cdots, x_n$ の関数になっている：

$$y_i = f_i(x_1, \cdots, x_n), \qquad i = 1, \cdots, n$$

この関数 f_i, $i = 1, \cdots, n$ が変数 $x_1, \cdots, x_n$ に関して無限回連続的微分可能であるとき $\varphi_\mu\varphi_\lambda^{-1}$ は無限回連続的微分可能であるというのである.

例 141. $\boldsymbol{R}^n$ は（座標近傍を $(\boldsymbol{R}^n, 1)$ にとることにより）n 次元可微分多様体である. したがって $\boldsymbol{C}^n$, $\boldsymbol{H}^n$, $M(n, \boldsymbol{R})$, $M(n, \boldsymbol{C})$, $M(n, \boldsymbol{H})$ もそれぞれ $2n$, $4n$, n^2, $2n^2$, $4n^2$ 次元可微分多様体である.

定理 45. 球面 S^{n-1} は $n-1$ 次元可微分多様体である†.

証明 定理 42 と同じ座標近傍系 (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) を用いる.

$$\varphi_2\varphi_1^{-1} = \varphi_2\psi_1 : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

を計算すると

$$\psi_1(x_1, \cdots, x_{n-1}) = \left(\frac{4x_1}{4 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}, \cdots, \frac{4x_{n-1}}{4 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}, 1 - \frac{8}{4 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}\right)$$

$$\xrightarrow{\varphi_2} \left(\frac{4x_1}{4 + \sum x_i^2}\Big/\left(2 - \frac{8}{4 + \sum x_i^2}\right), \cdots, \frac{4x_{n-1}}{4 + \sum x_i^2}\Big/\left(2 - \frac{8}{4 + \sum x_i^2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{4x_1}{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}, \cdots, \frac{4x_{n-1}}{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}\right)$$

となるから $\varphi_2\varphi_1^{-1}$ は無限回連続的微分可能である. 同様に

$$\varphi_1\varphi_2^{-1} = \varphi_1\psi_2 : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$$

も無限回連続的微分可能である. よって S^{n-1} は上記のような可微分構造をもつことがわかった.

定理 46. 射影空間 $\boldsymbol{R}P_{n-1}$, $\boldsymbol{C}P_{n-1}$, $\boldsymbol{H}P_{n-1}$ はそれぞれ $n-1$, $2n-2$, $4n-4$ 次元可微分多様体である.

証明 定理 43 と同じ座標近傍系 (U_i, φ_i), $i = 1, \cdots, n$ を用いる. $i \neq j$ として

$$\varphi_j\varphi_i^{-1} = \varphi_j\psi_i : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

を計算しよう. $i < j$ のときは

$$\psi_i(x_1, \cdots, x_{n-1})$$
$$= [x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_i, \cdots, x_{n-1}] \qquad (x_{j-1} \neq 0 \text{ に注意})$$

† この定理の述べ方には曖昧さがあるかもしれない. S^{n-1} には定理 45 の証明で与えるような 1 つの可微分構造を導入することができるというのが正しいが, 本書では定理のようないい方をすることにした.

$$\xrightarrow{\varphi_j} (x_1x_{j-1}^{-1}, \cdots, \overset{i-1}{x_{i-1}x_{j-1}^{-1}}, \overset{i}{x_{j-1}}, \overset{i+1}{x_ix_{j-1}^{-1}}, \cdots, \overset{j-1}{x_{j-2}x_{j-1}^{-1}}, \overset{j}{x_jx_{j-1}^{-1}}, \cdots, x_{n-1}x_{j-1}^{-1})$$

となる．各変数 $x_1, \cdots, x_{n-1} \in K$ を自然な方法で（命題 28）実変数に直すとき，$\varphi_j\varphi_i^{-1}(x_1, \cdots, x_{n-1})$ に表われた関数はこの新しい実変数に関して無限回連続的微分可能である．したがって $\varphi_j\varphi_i^{-1}$ は無限回連続的微分可能である．同様に $i > j$ のときは

$$\begin{aligned}&\varphi_j\varphi_i^{-1}(x_1, \cdots, x_{n-1})\\ &\quad = (x_1x_j^{-1}, \cdots, x_{j-1}x_j^{-1}, \overset{j}{x_{j+1}x_j^{-1}}, \cdots, \overset{i-2}{x_{i-1}x_j^{-1}}, \overset{i-1}{x_j^{-1}}, \overset{i}{x_ix_j^{-1}}, \cdots, x_{n-1}x_j^{-1})\end{aligned}$$

となるので $\varphi_j\varphi_i^{-1}$ も無限回連続的微分可能である．よって KP_{n-1} は上記のような可微分構造をもつことがわかった．

（3） Lie 群

Lie 群を定義するためにまずつぎの定義を準備しておく．

定義　M, N をそれぞれ m, n 次元位相多様体とする：$M = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, $N = \bigcup_{\alpha\in A}(V_\alpha, \psi_\alpha)$. 直積空間 $M \times N$ の座標近傍系として $(U_\lambda \times V_\alpha, \varphi_\lambda \times \psi_\alpha)$, $(\lambda, \alpha) \in \Lambda \times A$ を採用すると $M \times N$ は $m+n$ 次元位相多様体になる．この $M \times N$ を M と N の**直積多様体**という．M, N がともに可微分多様体であれば $M \times N$ も可微分多様体になる．

定義　M, N を（それぞれ m, n 次元）可微分多様体とする．写像 $f: M \to N$ は連続であるとし $f(x) = y$ とする．y を含む座標近傍 (V_α, ψ_α) に対して，x の近傍 U をとり $f(U) \subset V_\alpha$ とすることができる（補題 45 (1)）．x を含む座標近傍 $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ をとり x の近傍 $U \cap U_\lambda$ を考えると，明らかに $f(U \cap U_\lambda) \subset V_\alpha$ である．さて写像

$$\psi_\alpha f\varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U \cap U_\lambda) \longrightarrow \psi_\alpha(V_\alpha)$$

無限回連続的微分可能であるとき，写像 $f: M \to N$ は点 x において微分可能であるという．（この微分可能の定義は x の座標近傍 $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, y の座標近傍 (V_α, ψ_α) の選び方に関係しない）．写像 $f: M \to N$ が M の各点 x において微分可能であるとき f は**微分可能**であるという．

さて Lie 群を定義しよう．

定義　集合 G が **Lie 群** であるとは

（1）　G は群である．

（2）　G は可微分多様体である．

（3）　写像 $\mu: G \times G \to G$, $\mu(x, y) = xy$ および $\nu: G \to G$, $\nu(x) = x^{-1}$ はともに微分可能である．

の3つの条件をみたすことである.

例 142.　$\boldsymbol{R}$ は（和に関して）Lie 群である.

定理 47.　一般線形群 $GL(n, \boldsymbol{R})$, $GL(n, \boldsymbol{C})$, $GL(n, \boldsymbol{H})$ および古典群 $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$, $SU(n)$ は Lie 群である.

この定理は補題68を考慮にいれて，定理41，44の座標近傍系を少し修正すると証明される. しかし Lie 群の構造を調べるためにはこれらの座標近傍系は必ずしもよい座標近傍系とはいえないので，証明を与えなかった（指数関数 exp を用いると，いわゆる Lie 環と関係のつく座標近傍が選べるのである）. なお一般線形群 $GL(n, K)$ の閉部分群は Lie 群であることが知られている.

お話し　われわれはさきに群，K-加群，位相空間，位相群などを定義したが，それと同時に**同型**という概念を導入した. この同型という概念は胞複体および位相多様体，可微分多様体，Lie 群に対しても与えなければならないが本書では紙面の都合で省略せざるを得なかった（次章のファイバー空間の間の同型についても省略した). したがって本書では，X が胞複体である，あるいは X が多様体であるということはそれぞれ X がある胞複体の構造をもつ，X はある多様体の構造をもつという意味に理解していただくことにする. 可微分多様体の間に同型を定義するとき，その同型の仕方は1通りではない. 実際，普通に用いられる同型[†] のほかに**同境**（**コボルディズム**）$\boldsymbol{h}$ **同境**（$\boldsymbol{h}$ **コボルディズム**）などがあり，同型の定義を変えるごとに多様体論の新しい理論が生まれるともいえる（ファイバー空間についても同型の与え方は1通りでない).

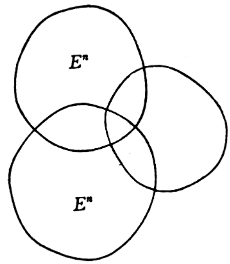
この章において胞複体と多様体について述べたが，この考え方について少し触れておこう. 数学ではつねに用いる方法であるが，ある数学的対象物を調べるとき，それを構造のよくわかっている簡単なものに帰着させて考察するのである. 同じことであるが，簡単なものを組立てて複雑なものを構成する技術が大切である. たとえば直積空間をつくること，群の等質空間をつくること，懸垂空間をつくること，空間の1部分を1点に縮めるなどの操作は難より易の空間へ，あるいは逆に易より難の空間を構成する1つの手段といえるであろう. さて位相幾何学で最も簡単な図形として多く採用されるのが円板 E^n，単体 σ^n（187頁）である. これらをもとにして新しい図形を構成するのにつぎの方法がよく用

---

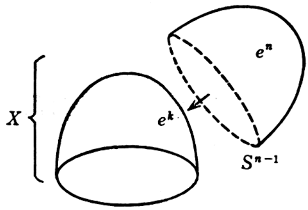
† 2つの可微分多様体 M, N の間に f, f^{-1} がともに微分可能である同相写像 $f: M \to N$ が存在するとき，M と N は**同型**であるという. 同型な可微分多様体は同じ**可微分構造**をもつという.

いられている．

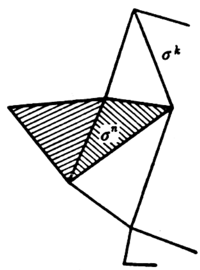
（1）（微分位相幾何学）円板 E^n を右図のように重ね合せてできる図形が位相多様体である．その重ね方の指定を変えるごとに異なる図形が生まれるが，その重ね方に滑らかさを要求した図形が可微分多様体である．与えられた位相多様体にどれだけの可微分多様体の構造が導入されるかという問題は大きい研究課題の1つになっている．



（2）（代数位相幾何学（ホモトピー論））右図のようにいくつかの円板 $E^k, E^n, \cdots$ を用いて，順次円板 E^n をその境界 S^{n-1} で接着しながら構成した図形が胞複体である．この方法で図形を調べるとき，その接着する写像 $f: S^{n-1} \to X$ が本質的な役割を果たすが，この写像を調べるのがホモトピー論である（ホモトピー群 $\pi_{n-1}(X)$（4章§6参照））．



（3）（代数位相幾何学（ホモロジー論），PL 位相幾何学）右図のようにいくつかの単体 σ^n をその境界で接着させてできる図形が多面体（187頁）である．σ^n の境界の接着する仕方を調べる理論がホモロジー論であり（ホモロジー群 $H_n(X)$）かつ PL 位相幾何学である．



4 射影空間と古典群の基本群と被覆空間

任意の位相空間 X に対して基本群 $\pi_1(X)$ が定義されるが，射影空間および古典群の基本群を求めることを目的とする．なお，位相幾何学で重要な概念の１つであるファイバー空間について例をあげながら説明しよう．

§1. ファイバー空間

ファイバー空間を定義し，$S_K{}^{n-1}/S_K{}^0 = KP_{n-1}$（定理 19），$G(n, K)/G(n-1, K) = S_K{}^{n-1}$（定理 15）がファイバー空間であることを示そう．ファイバー空間は直積空間の拡張になっている．もう少し詳しくいうならば，ファイバー空間とは直積空間を張り合せてつくられる空間であるということができるであろう．

(1) ファイバー空間

定義 (B, p, X, F) が**ファイバー空間**（または**局所自明なファイバー空間**）であるとはつぎの３つの条件をみたすことである．

（1） B, X, F は位相空間である．

（2） $p: B \to X$ は連続な全射である．

（3） X はつぎの性質をもつ開被覆 $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ をもつ：各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $p\varphi_\lambda(x, y) = x$ をみたす同相写像

$$\varphi_\lambda : U_\lambda \times F \longrightarrow p^{-1}(U_\lambda)$$

が存在する．

このとき B を**全空間**，X を**底空間**，F を**ファイバー**，p を**射影**という．また B は X を底空間，F をファイバーとし p を射影にもつファイバー空間であるといういい方もする．さらに本書では $B/F = X$ の記号を用いることにした．X の点 x に対して $p^{-1}(x)$ を **x の上のファイバー**という．$p^{-1}(x)$ を F_x で表わすことが多い．F_x は F と同相である．実際，$x \in U_\lambda$ であるとするとき，写像 $\varphi_{\lambda,x} : F \to F_x$, $\varphi_{\lambda,x}(y) = \varphi_\lambda(x, y)$ は同相写像である．

例 143. X, Y を位相空間とし，$p: X\times Y\to X$ を X への射影とする．このとき直積空間 $X\times Y$ は X を底空間，Y をファイバーとし，p を射影にもつファイバー空間である：

$$(X\times Y)/Y = X$$

実際，X の開被覆として X 自身をとり，写像 $\varphi: X\times Y\to p^{-1}(X)=X\times Y$ として恒等写像をとると，明らかにファイバー空間の条件をみたしている．

例 144. $\boldsymbol{R}$ は S^1 を底空間，$\boldsymbol{Z}$ をファイバーとし，$p:\boldsymbol{R}\to S^1$, $p(x)=e^{2\pi ix}$ を射影にもつファイバー空間である：

$$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} = S^1$$

実際，$U_1=S^1-\{1\}$, $U_2=S^1-\{-1\}$ とおくと，U_1, U_2 は S^1 の開集合であって $S^1=U_1\cup U_2$ である．$p(x)=1 \Leftrightarrow x\in\boldsymbol{Z}$ であるから $p^{-1}(U_1)=\boldsymbol{R}-\boldsymbol{Z}$ である．同様に $p^{-1}(U_2)=\boldsymbol{R}-\left(\boldsymbol{Z}-\dfrac{1}{2}\right)=\left\{x\in\boldsymbol{R}\,\middle|\,x\neq n-\dfrac{1}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}\right\}$ である．$U_i\times\boldsymbol{Z}$ と $p^{-1}(U_i)$ が同相であることを示すためにつぎの写像 φ_i, ψ_i, $i=1,2$ を定義しよう．

$$U_i\times\boldsymbol{Z}\ \underset{\psi_i}{\overset{\varphi_i}{\rightleftarrows}}\ p^{-1}(U_i)$$

U_1 の元は1意的に $e^{2\pi i\theta}$, $0<\theta<1$ と表わされるので φ_1 を

$$\varphi_1(e^{2\pi i\theta}, m)=\theta+m$$

と定義する．つぎに $x\in\boldsymbol{R}$ に対して $m\leqq x<m+1$ をみたす整数 m を $[[x]]$† で表わすことにして ψ_1 を

$$\psi_1(x)=(e^{2\pi ix}, [[x]])$$

と定義する．このとき φ_1, ψ_1 は連続写像であり，かつ $\psi_1\varphi_1=1$, $\varphi_1\psi_1=1$ をみたすことが容易に確かめられるから φ_1 は同相写像である．さらに φ_1 は $p\varphi_1(e^{2\pi i\theta}, m)=p(\theta+m)=e^{2\pi i(\theta+m)}=e^{2\pi i\theta}$ をみたしている．同様に U_2 の元は $e^{2\pi i\theta}$, $-\dfrac{1}{2}<\theta<\dfrac{1}{2}$ と1通りに表わされるので φ_2 を

$$\varphi_2(e^{2\pi i\theta}, m)=\theta+m$$

と定義し，また ψ_2 を

$$\psi_2(x)=\left(e^{2\pi ix}, \left[\left[x+\frac{1}{2}\right]\right]\right)$$

と定義すると，φ_2, ψ_2 は連続写像でありかつ $\psi_2\varphi_2=1$, $\varphi_2\psi_2=1$ をみたすから φ_2 は同相

† [[ ]] はいわゆる Gauss 記号 [ ] にほかならないが，記号 [ ] は類の記号 [ ] と混同するためここでは [[ ]] の記号を用いた．

写像である．さらに φ_2 は $p\varphi_2(e^{2\pi i\theta}, m) = e^{2\pi i\theta}$ をみたしている．以上により $(\boldsymbol{R}, p, S^1, \boldsymbol{Z})$ がファイバー空間の構造をもつことがわかった．

お話し　$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} = S^1$ を例にとってファイバー空間の直観的な意味を考えてみよう．例111に示したように $\boldsymbol{R}$ は決して

$$\boldsymbol{R} \simeq S^1 \times \boldsymbol{Z}$$

とはならない．しかしながら，$\boldsymbol{R}$ と $S^1 \times \boldsymbol{Z}$ はある意味において似通った空間なのである．これをつぎのように理解することにしよう．射影 $p: \boldsymbol{R} \to S^1$ は連続な断面 $s: S^1 \to \boldsymbol{R}$ をもたない（例111）が，S^1 から1点を除くと連続な断面をもつのである．実際，写像 $s: S^1 - \{1\} = U_1 \to \boldsymbol{R}$, $s(e^{2\pi i\theta}) = \theta$（ただし $0 < \theta < 1$）は $ps = 1$ をみたしている．そして

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R} - \boldsymbol{Z} &= \cdots \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup \cdots \\
&= \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{(0, 1) + n\} \qquad \text{(148頁参照)} \\
&\simeq (0, 1) \times \boldsymbol{Z} = s(S^1 - \{1\}) \times \boldsymbol{Z} \simeq (S^1 - \{1\}) \times \boldsymbol{Z}
\end{aligned}$$

となっている．すなわち $\boldsymbol{R}$ において例外点 $\boldsymbol{Z}$ を無視し，一方 S^1 において除外点1を無視すると $\boldsymbol{R} \simeq S^1 \times \boldsymbol{Z}$ と思えるのである．しかし除外点があれば実際問題困るので $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{Z}$ を除いて考え（$R - \boldsymbol{Z} \simeq U_1 \times \boldsymbol{Z}$），その除外点 $\boldsymbol{Z}$ を覆うもう1枚の空間 $\boldsymbol{R} - \left(\boldsymbol{Z} - \dfrac{1}{2}\right)$ $\left(R - \left(\boldsymbol{Z} - \dfrac{1}{2}\right) \simeq U_2 \times \boldsymbol{Z}\right)$ を考えて，$\boldsymbol{R}$ をこの2枚の空間 $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{R} - \left(\boldsymbol{Z} - \dfrac{1}{2}\right)$ を重ね合せたものと理解するのである．

定理48.　$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}, \mathfrak{C}$; $d = 1, 2, 4, 8$ とする．$S_K{}^1$ は S_d を底空間，$S_K{}^0$ をファイバーとし，Hopf の写像 $\nu: S_K{}^1 \to S_d$ を射影にもつファイバー空間である：

$$S^1/S^0 = S_1, \quad S^3/S^1 = S_2, \quad S^7/S^3 = S_4, \quad S^{15}/S^7 = S_8$$

証明　Hopf の写像 $\nu: S_K{}^1 \to S_d$, $\nu(x, y) = (|x|^2, y\bar{x})$ は連続な全射である．（全射であることは容易に確かめられる）．さて $S_d = \{(\sigma, s) \in \boldsymbol{R} \times K \mid \sigma(1-\sigma) = |s|^2\}$ の開被覆として，$U_1 = S_d - (1, 0)$, $U_2 = S_d - (0, 0)$ をとる：$S_d = U_1 \cup U_2$. $U_i \times S_K{}^0$ と $\nu^{-1}(U_i)$ が同相であることを示すためにつぎの写像 φ_i, ψ_i, $i = 1, 2$ を定義しよう．

$$U_1 \times S_K{}^0 \underset{\psi_1}{\overset{\varphi_1}{\rightleftarrows}} \nu^{-1}(U_1)$$

$$\varphi_1((\sigma, s), u) = \left(\frac{\bar{s}u}{\sqrt{1-\sigma}}, u\sqrt{1-\sigma}\right)$$

$$\psi_1(x, y) = \left((|x|^2, y\bar{x}), \frac{y}{|y|}\right)$$

$(\sigma, s) \in U_1$ ならば $\sigma \neq 1$ であるから，φ_1 は定義されかつ連続写像である．また $(x, y) \in \nu^{-1}(U_1)$ ならば $y \neq 0$ である（$y=0$ とすると，$(x, y) \in S_K{}^1$ より $|x|^2=1$ がわかり，$\nu(x, y) = (|x|^2, 0) = (1, 0) \notin U_1$ となり $(x, y) \in \nu^{-1}(U_1)$ に反する）から，ψ_1 は定義されかつ連続である．そして $\psi_1\varphi_1 = 1$ である．実際，

$$\psi_1\varphi_1((\sigma, s), u) = \psi_1\left(\frac{\bar{s}u}{\sqrt{1-\sigma}}, u\sqrt{1-\sigma}\right)$$

$$= \left(\left(\left|\frac{\bar{s}u}{\sqrt{1-\sigma}}\right|^2, u\sqrt{1-\sigma}\frac{\bar{u}s}{\sqrt{1-\sigma}}\right), \frac{u\sqrt{1-\sigma}}{|u\sqrt{1-\sigma}|}\right)$$

$$= \left(\left(\frac{|s|^2}{1-\sigma}, s\right), u\right) = ((\sigma, s), u)$$

また $\varphi_1\psi_1 = 1$ である．実際，

$$\varphi_1\psi_1(x, y) = \varphi_1\left((|x|^2, y\bar{x}), \frac{y}{|y|}\right) = \left(\frac{\overline{y\bar{x}}\, y/|y|}{\sqrt{1-|x|^2}}, \frac{y}{|y|}\sqrt{1-|x|^2}\right)$$

$$= \left(\frac{x\bar{y}y}{|y|^2}, \frac{y|y|}{|y|}\right) = (x, y)$$

よって φ_1 は同相写像である．さらに φ_1 が $\nu\varphi_1((\sigma, s), u) = (\sigma, s)$ をみたすことも容易に確かめられる（実は $\psi_1\varphi_1 = 1$ の計算の中ですでに証明されている）．同様に写像 φ_2, ψ_2 を

$$U_2 \times S_K{}^0 \underset{\psi_2}{\overset{\varphi_2}{\rightleftarrows}} \nu^{-1}(U_2)$$

$$\varphi_2((\sigma, s), u) = \left(u\sqrt{\sigma}, \frac{su}{\sqrt{\sigma}}\right)$$

$$\psi_2(x, y) = \left((|x|^2, y\bar{x}), \frac{x}{|x|}\right)$$

とおくと，φ_2, ψ_2 は定義されて連続写像であり，かつ $\psi_2\varphi_2 = 1$, $\varphi_2\psi_2 = 1$ をみたすことが容易に確かめられる．よって φ_2 は同相写像である．さらに φ_2 は $\nu\varphi_2((\sigma, s), u) = (\sigma, s)$ をみたしている．以上で$(S_K{}^1, p, S_d, S_K{}^0)$がファイバー空間の構造をもつことがわかった．

定理 49. $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．球面 $S_K{}^{n-1}$ は射影空間 KP_{n-1} を底空間，$S_K{}^0$ をファイバーとし，$p: S_K{}^{n-1} \to KP_{n-1}$, $p(a) = [a]$ を射影にもつファイバー空間である：

$$S^{n-1}/S^0 = \boldsymbol{R}P_{n-1}, \qquad S^{2n-1}/S^1 = \boldsymbol{C}P_{n-1}, \qquad S^{4n-1}/S^3 = \boldsymbol{H}P_{n-1}$$

証明 $U_i = \{[a_1, \cdots, a_n] \in KP_{n-1} | (a_1, \cdots, a_n) \in S_K{}^{n-1}, a_i \neq 0\}$, $i = 1, \cdots, n$ とおくと U_i は KP_{n-1} の開集合であり，かつ $KP_{n-1} = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ である（定理 43 の証明参照）．$U_i \times S_K{}^0$ と $p^{-1}(U_i)$ が同相であることを示すためにつぎの写像 φ_i, ψ_i, $i = 1, \cdots, n$ を定義しよう．

$$U_i \times S_K{}^0 \underset{\psi_i}{\overset{\varphi_i}{\rightleftarrows}} p^{-1}(U_i)$$

$$\varphi_i([a_1, \cdots, a_n], u) = \left(\frac{a_1 a_i{}^{-1} u}{|a_i|^{-1}}, \cdots, \overset{i}{\frac{u}{|a_i|^{-1}}}, \cdots, \frac{a_n a_i{}^{-1} u}{|a_i|^{-1}}\right)$$

$$\psi_i(a_1, \cdots, a_n) = \left([a_1, \cdots, a_n], \frac{a_i}{|a_i|}\right)$$

は連続写像であり，かつ $\psi_i\varphi_i = 1$, $\varphi_i\psi_i = 1$ をみたすから φ_i は同相写像である．さらに φ_i は $p\varphi_i([x_1, \cdots, x_n], u) = [x_1, \cdots, x_n]$ をみたしている．よって $(S_K{}^{n-1}, p, KP_{n-1}, S_K{}^0)$ はファイバー空間の構造をもつ．

定理 50. 古典群 $G(n, K)$ $(SG(n, K))$ は球面 $S_K{}^{n-1}$ を底空間，$G(n-1, K)(SG(n-1, K))$ をファイバーとし，$p: G(n, K) \to S_K{}^{n-1}$　$(p: SG(n, K) \to S_K{}^{n-1})$, $p(A) = Ae_n$ を射影にもつファイバー空間である：

$$O(n)/O(n-1) = S^{n-1} \qquad SO(n)/SO(n-1) = S^{n-1}$$
$$U(n)/U(n-1) = S^{2n-1} \qquad SU(n)/SU(n-1) = S^{2n-1}$$
$$Sp(n)/Sp(n-1) = S^{4n-1}$$

証明　まず $G(n, K)$ について証明しよう．$S_K{}^{n-1}$ の開被覆として $U_1 = S_K{}^{n-1} - e_n$, $U_2 = S_K{}^{n-1} - (-e_n)$ をとる：$S_K{}^{n-1} = U_1 \cup U_2$. $U_i \times G(n-1, K)$ と $p^{-1}(U_i)$ が同相であることを示すためにつぎの写像 $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2$ を定義しよう．

$$U_1 \times G(n-1, K) \underset{\psi_1}{\overset{\varphi_1}{\rightleftarrows}} p^{-1}(U_1)$$

$ps = 1$ をみたす連続写像 $s: U_1 = S_K{}^{n-1} - e_n \to G(n, K)$ (147, 159, 168 頁) を用いて

$$\varphi_1(\boldsymbol{a}, B) = s(\boldsymbol{a})B\left(= s(\boldsymbol{a})\begin{pmatrix} B & \\ & 1\end{pmatrix} \text{のことである}\right)$$

$$\psi_1(A) = (p(A), (sp(A))^{-1}A)$$

と定義すると φ_1, ψ_1 は連続でありかつ $\psi_1\varphi_1 = 1$, $\varphi_1\psi_1 = 1$ をみたし，さらに $p\varphi_1(\boldsymbol{a}, B) = \boldsymbol{a}$ がなりたつ，実際，

$$p\varphi_1(\boldsymbol{a}, B) = p(s(\boldsymbol{a})B) = ps(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$$

$$\begin{aligned}\psi_1\varphi_1(\boldsymbol{a}, B) &= (p\varphi_1(\boldsymbol{a}, B), (s(p\varphi_1(\boldsymbol{a}, B)))^{-1}\varphi_1(\boldsymbol{a}, B)) \\ &= (\boldsymbol{a}, (s(\boldsymbol{a}))^{-1}s(\boldsymbol{a})B) = (\boldsymbol{a}, B)\end{aligned}$$

$$\varphi_1\psi_1(A) = \varphi_1(p(A), (sp(A))^{-1}A) = (sp(A))(sp(A))^{-1}A = A$$

である．つぎに $C=\begin{pmatrix}-1&&&&\\&1&&&\\&&\ddots&&\\&&&1&\\&&&&-1\end{pmatrix}$ とおくと $C\in G(n, K)$ でありかつ $C(-\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{e}_n$ である．写像 $s_2: U_2\to G(n, K)$ を

$$s_2(\boldsymbol{a})=Cs(C\boldsymbol{a})$$

と定義すると s_2 は連続であり $ps_2=1$ をみたしている．実際，$ps_2(\boldsymbol{a})=pCs(C\boldsymbol{a})=Cps(C\boldsymbol{a})$（一般に $C, A\in M(n, K)$ に対し $Cp(A)=p(CA)$ である）$=CC\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ である．さて

$$U_2\times G(n-1, K) \underset{\psi_2}{\overset{\varphi_2}{\rightleftarrows}} p^{-1}(U_2)$$

$$\varphi_2(\boldsymbol{a}, B)=s_2(\boldsymbol{a})B$$

$$\psi_2(A)=(p(A), (s_2p(A))^{-1}A)$$

と定義すると φ_2, ψ_2 は連続であり $\psi_2\varphi_2=1$, $\varphi_2\psi_2=1$ をみたし，さらに $p\varphi_2(\boldsymbol{a}, B)=\boldsymbol{a}$ がなりたつ．以上で $(G(n, K), p, S_K{}^{n-1}, G(n-1, K))$ がファイバー空間の構造をもつことがわかった．$SG(n, K)$ についても連続写像 $s: U_1=S_K{}^{n-1}-\boldsymbol{e}_n\to SG(n, K)$, $ps=1$ (150, 163 頁) を用いると $G(n, K)$ のときと全く同様にして証明することができる．

定理 50 の証明にみられるように，$G(n, K)/G(n-1, K)=S_K{}^{n-1}$ がファイバー空間であることを示すためには $ps=1$ をみたす連続写像 $s: U_1\to G(n, K)$ の存在が本質的であった．このことに注目してつぎの命題を証明しておこう．

G を位相群，H を G の部分群とし，$p: G\to G/H$ を射影とする．s が p の連続な**局所断面**であるとは，s が G/H における $[e]$（e は G の単位元）のある近傍 U で定義された連続な写像 $s: U\to G$ であって，かつ $ps=1$ をみたすことである[†]．

命題 128. G を位相群，H を G の部分群とし，$p: G\to G/H$ を射影とする．もし p の連続な局所断面 $s: U\to G$ が存在するならば，G は G/H を底空間，H をファイバーとし，$p: G\to G/H$ を射影にもつファイバー空間である．

証明 各 $a\in G$ に対して $U_a=aU$ とおくと，U_a は G/H の開集合であるから，G/H の開被覆として $G/H=\bigcup_{a\in G} U_a$ をとる．写像 $s_a: U_a\to G$ を

$$s_a(X)=as(a^{-1}X)$$

† G を Lie 群，H を G の閉部分群とし，$p: G\to G/H$ を射影とする．このとき p の局所断面 s が存在することが知られている．

と定義すると s_a は連続であり，かつ $ps_a=1$ をみたしている．実際，$ps_a(X)=pas(a^{-1}X)=aps(a^{-1}X)=a(a^{-1}X)=X$ である．さて $U_a\times H$ と $p^{-1}(U_a)$ が同相であることを示すためにつぎの写像 φ_a, ψ_a, $a\in G$ を定義しよう．

$$U_a\times H \underset{\psi_a}{\overset{\varphi_a}{\rightleftarrows}} p^{-1}(U_a)$$

$$\varphi_a(X, h)=s_a(X)h$$

$$\psi_a(x)=(p(x), (s_a p(x))^{-1}x)$$

は連続でありかつ $\psi_a\varphi_a=1$, $\varphi_a\psi_a=1$ をみたし，さらに $p\varphi_a(X, h)=X$ がなりたつ．よって $(G, p, G/H, H)$ はファイバー空間の構造をもつ．

(2) ファイバー束

ファイバー空間とは直積空間 $U_\lambda\times F$ を重ね合せることによって作られた空間であったが，この節ではさらに詳しくその重ね合せ方を群 G により指定されたファイバー束について述べよう．さきにあげたファイバー空間の例はいずれもファイバー束になっている．

定義 $(B, p, X, F\,;G)$ が**ファイバー束**であるとはつぎの6つの条件をみたすことである．

(1) B, X, F は位相空間である．

(2) $p:B\to X$ は連続な全射である．

(3) G は位相群であって，位相空間 F に左から効果的に働いている．

(4) X の開被覆 $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ および各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $p\varphi_\lambda(x, y)=x$ をみたす同相写像

$$\varphi_\lambda: U_\lambda\times F \longrightarrow p^{-1}(U_\lambda)$$

が存在してつぎの性質 (5) (6) をもつ．

(5) $x\in U_\lambda$ に対して写像 $\varphi_{\lambda,x}: F\to p^{-1}(x)$ を $\varphi_{\lambda,x}(y)=\varphi_\lambda(x, y)$ と定義する．このとき，$U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$ ならば $U_\lambda\cap U_\mu$ の各点 x に対して，同相写像

$$\varphi_{\mu,x}{}^{-1}\varphi_{\lambda,x}: F \longrightarrow F$$

は G のある元 g による作用と一致している．(G が F に効果的に働いているからこの g はただ1つ決る)．

(6) $U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$ のとき，写像 $g_{\lambda\mu}: U_\lambda\cap U_\mu\to G$ を

$$g_{\lambda\mu}(x)=\varphi_{\mu,x}{}^{-1}\varphi_{\lambda,x}$$

と定義すれば $g_{\lambda\mu}$ は連続である．

このとき G を**構造群**，U_λ を**座標近傍**，φ_λ を**座標関数**，$g_{\mu\lambda}$ を**座標変換**（または**変換関数**）という．

ファイバー束は明らかにファイバー空間である．

ファイバー束において

$$x \in U_\lambda \text{ ならば } g_{\lambda\lambda}(x) = e, \qquad e \text{ は } G \text{ の単位元}$$
$$x \in U_\lambda \cap U_\mu \text{ ならば } g_{\lambda\mu}(x) = (g_{\mu\lambda}(x))^{-1}$$

がなりたっていることに注意しておく．

定義　ファイバー束 $(B, p, X, F\,;G)$ において，ファイバー F が構造群 G と一致しており，かつ構造群 G のファイバー G への働き方が群 G の積と一致している（例 105）とき，$(B, p, X, G\,;G)$ を**主ファイバー束**という．本書では $B/G \equiv X$ の記号を用いることにする．

例 145.　X, Y を位相空間とする．直積空間 $X \times Y$ は X を底空間，Y をファイバーとし，$p: X \times Y \to X$, $p(x, y) = x$ を射影にもち，かつ単位元 e のみからなる群 $G = \{e\}$ を構造群にもつファイバー束である：

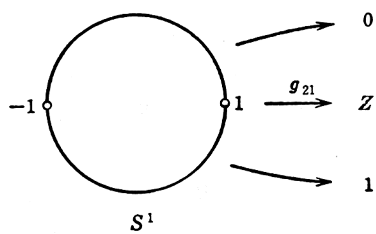
$$(X \times Y, p, X, Y\,;\{e\})$$

例 146.　$\boldsymbol{R}$ は S^1 を底空間，$\boldsymbol{Z}$ をファイバーとし，$p: \boldsymbol{R} \to S^1$, $p(x) = e^{2\pi i x}$ を射影にもつ主ファイバー束である：

$$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \equiv S^1$$

実際，例 144 と同じ記号を用いることにして $g_{21}: U_2 \cap U_1 \to \boldsymbol{Z}$ を求めよう．$x \in U_1 \cap U_2$ ならば $x \neq \pm 1$ であるから x は $x = e^{2\pi i\theta}$, $0 < \theta < 1$, $\theta \neq \dfrac{1}{2}$ と 1 通りに表わされる．このとき

$$g_{21}(x) : \boldsymbol{Z} \xrightarrow{\varphi_{1,x}} \boldsymbol{Z}_x \xrightarrow{\varphi_{2,x}^{-1}} \boldsymbol{Z}$$
$$\begin{aligned} g_{21}(x)(n) &= \varphi_{2,x}{}^{-1}(\varphi_{1,x}(n)) \\ &= \varphi_{2,x}{}^{-1}(\varphi_1(x, n)) \\ &= \varphi_{2,x}{}^{-1}(\theta + n) \\ &= \left[\!\left[\theta + n + \frac{1}{2}\right]\!\right] \end{aligned}$$



となるから $0 < \theta < 1/2$ のとき $g_{21}(x)n = n$, $1/2 < \theta < 1$ のときは $g_{21}(x)n = n + 1$ である．ゆえに $g_{21}(x)$ は $\boldsymbol{Z}$ において 0 または 1 だけ平行移動させる作用に一致している．また g_{21} が連続であることも明らかであるから，$(\boldsymbol{R}, p, S^1, \boldsymbol{Z}\,;\boldsymbol{Z})$ が主ファイバー束の

構造をもつことがわかった.

定理51.　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}, \mathfrak{C}$; $d=1, 2, 4, 8$ とする. 球面 $S_K{}^1$ は S_d を底空間, $S_K{}^0$ をファイバーとし, Hopf の写像 $\nu: S_K{}^1\to S_d$ を射影にもち, かつ構造群 $O(d)$ をもつファイバー束である：

$$(S^1, \nu, S_1, S^0 ; O(1))$$
$$(S^3, \nu, S_2, S^1 ; O(2))$$
$$(S^7, \nu, S_4, S^3 ; O(4))$$
$$(S^{15}, \nu, S_8, S^7 ; O(8))$$

なお $K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ のときは $S_K{}^1$ は $S_K{}^0$ を構造群にもつ主ファイバー束にもなっている(定理52の $n=2$ の場合である).

$$S^1/S^0\equiv S_1,\quad S^3/S^1\equiv S_2,\quad S^7/S^3\equiv S_4$$

証明　定理48と同じ記号を用いることにして $g_{21}: U_2\cap U_1\to O(d)$ を求めよう. $(\sigma, s)\in U_2\cap U_1$ ならば $s\neq 0$ であるから $\sigma\neq 0, 1$ である.

$$g_{21}(\sigma, s): S_K{}^0 \xrightarrow{\varphi_{1,(\sigma,s)}} \nu^{-1}(\sigma, s) \xrightarrow{\varphi_{2,(\sigma,s)}{}^{-1}} S_K{}^0$$

$$g_{21}(\sigma, s)(u)=\varphi_{2,(\sigma,s)}{}^{-1}(\varphi_{1,(\sigma,s)}(u))=\varphi_{2,(\sigma,s)}{}^{-1}(\varphi_1((\sigma, s), u))$$

$$=\varphi_{2(\sigma,s)}{}^{-1}\left(\frac{\bar{s}u}{\sqrt{1-\sigma}}, u\sqrt{1-\sigma}\right)=\frac{\bar{s}u}{\sqrt{1-\sigma}}\Bigg/\left|\frac{\bar{s}u}{\sqrt{1-\sigma}}\right|=\frac{\bar{s}}{|\bar{s}|}u$$

となる. 対応 $x\in K\to\dfrac{\bar{s}}{|\bar{s}|}x$ は $O(K)=O(d)$ の元である (例64) から $g_{21}(\sigma, s)\in O(d)$ である. かつ $g_{21}(\sigma, s)x=\dfrac{\bar{s}}{|\bar{s}|}x$ であるから $g_{21}: U_2\cap U_1\to O(d)$ は連続である. よって $(S_K{}^1, \nu, S_d, S_K{}^0 ; O(d))$ はファイバー束の構造をもつ.

$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ のときには $S_K{}^0$ は位相群であり (例96), かつこのとき $g_{21}(\sigma, s)=\dfrac{\bar{s}}{|\bar{s}|}$ となるから $g_{21}(\sigma, s)\in S_K{}^0$ であり, かつ $g_{21}: U_2\cap U_1\to S_K{}^0$ は連続写像である. したがって $(S_K{}^1, \nu, S_d, S_K{}^0 ; S_K{}^0)$ は主ファイバー束の構造ももつことがわかった (定理52参照).

定理52.　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする. 球面 $S_K{}^{n-1}$ は射影空間 KP_{n-1} を底空間, $S_K{}^0$ をファイバーとし, $p: S_K{}^{n-1}\to KP_{n-1}$, $p(a)=[a]$ を射影にもつ主ファイバー束である：

$$S^{n-1}/S^0\equiv \boldsymbol{R}P_{n-1},\quad S^{2n-1}/S^1\equiv \boldsymbol{C}P_{n-1},\quad S^{4n-1}/S^3\equiv \boldsymbol{H}P_{n-1}$$

証明　定理49と同じ記号を用いることにして $g_{ji}: U_j\cap U_i\to S_K{}^0$ を求めよう. $[a]=[a_1, \cdots, a_n]\in U_j\cap U_i$ ならば $a_i\neq 0$, $a_j\neq 0$ である.

$$g_{ji}([a]) : S_K{}^0 \xrightarrow{\varphi_{i,[a]}} p^{-1}([a]) \xrightarrow{\varphi_{j,[a]}{}^{-1}} S_K{}^0$$

$$g_{ji}([a])(u) = \varphi_{j,[a]}{}^{-1}(\varphi_{i,[a]}(u)) = \varphi_{j,[a]}{}^{-1}(\varphi_i([a], u))$$

$$= \varphi_{j,[a]}{}^{-1}\left(\frac{a_1 a_i{}^{-1}u}{|a_i|^{-1}}, \cdots, \frac{a_n a_i{}^{-1}u}{|a_i|^{-1}}\right)$$

$$= \frac{a_j a_i{}^{-1}u}{|a_i|^{-1}} \Big/ \left|\frac{a_j a_i{}^{-1}u}{|a_i|^{-1}}\right| = \left(\frac{a_j}{|a_j|}\right)\left(\frac{a_i}{|a_i|}\right)^{-1} u$$

であるから $g_{ji}([a]) = \left(\frac{a_j}{|a_j|}\right)\left(\frac{a_i}{|a_i|}\right)^{-1} \in S_K{}^0$ でありかつ $g_{ji} : U_j \cap U_i \to S_K{}^0$ は連続である．よって $(S_K{}^{n-1}, p, KP_{n-1}, S_K{}^0 ; S_K{}^0)$ は主ファイバー束の構造をもつ．

定理 53. 古典群 $G(n, K)$ $(SG(n, K))$ は球面 $S_K{}^{n-1}$ を底空間，$G(n-1, K)$ $(SG(n-1, K))$ をファイバーとし，$p : G(n, K) \to S_K{}^{n-1}$ $(p : SG(n, K) \to S_K{}^{n-1})$，$p(A) = Ae_n$ を射影にもつ主ファイバー束である：

$$O(n)/O(n-1) \equiv S^{n-1} \qquad SO(n)/SO(n-1) \equiv S^{n-1}$$
$$U(n)/U(n-1) \equiv S^{2n-1} \qquad SU(n)/SU(n-1) \equiv S^{2n-1}$$
$$Sp(n)/Sp(n-1) \equiv S^{4n-1}$$

証明 定理 50 と同じ記号を用いることにして $g_{21} : U_2 \cap U_1 \to G(n-1, K)$ を求めよう．$a \in U_2 \cap U_1$ ならば $a \neq \pm e_n$ である．

$$g_{21}(a) : G(n-1, K) \xrightarrow{\varphi_{1,a}} p^{-1}(a) \xrightarrow{\varphi_{2,a}{}^{-1}} G(n-1, K)$$

$$g_{21}(a)(B) = \varphi_{2,a}{}^{-1}(\varphi_{1,a}(B)) = \varphi_{2,a}{}^{-1}(\varphi_1(a, B)) = \varphi_{2,a}{}^{-1}(s(a)B)$$

$$= (s_2(p(s(a)B)))^{-1}s(a)B = (s_2(a))^{-1}s(a)B$$

となるから $g_{21}(a) = (s_2(a))^{-1}s(a) \in G(n-1, K)$ である $(p(s_2(a)) = a = p(s(a))$ であるから $(s_2(a))^{-1}s(a) \in G(n-1, K)$ である)．かつ s, s_2 は連続であるから $g_{21} : U_2 \cap U_1 \to G(n-1, K)$ も連続である．よって $(G(n, K), p, S_K{}^{n-1}, G(n-1, K) ; G(n-1, K))$ は主ファイバー束の構造をもつ，$SG(n, K)$ についても同様である．

定理 53 はつぎの命題の特別の場合になっている．

命題 129. G を位相群，H を G の部分群とし，$p : G \to G/H$ を射影とする．もし p の連続な局所断面 $s : U \to G$ が存在するならば，G は G/H を底空間，H をファイバーとし，$p : G \to G/H$ を射影にもつ主ファイバー束である：

$$(G, p, G/H, H ; H)$$

証明 命題 128 と同じ記号を用いることにして，$g_{ba} : U_b \cap U_a \to H$ を求めよう．$x \in U_b \cap U_a$ として

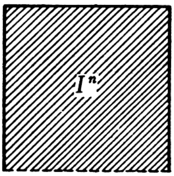
$$g_{ba}(x): H \xrightarrow{\varphi_{a,x}} p^{-1}(x) \xrightarrow{\varphi_{b,x}^{-1}} H$$

$$g_{ba}(x)(h) = \varphi_{b,x}^{-1}(\varphi_{a,x}(h)) = \varphi_{b,x}^{-1}(\varphi_a(x, h)) = \varphi_{b,x}^{-1}(s_a(x)h)$$
$$= (s_b(p(s_a(x)h)))^{-1}s_a(x)h = (s_b(x))^{-1}s_a(x)h$$

となるから $g_{ba}(x) = (s_b(x))^{-1}s_a(x) \in H$ である．かつ s_b, s_a が連続であるから g_{ba} : $U_b \cap U_a \to H$ も連続である．よって $(G, p, G/H, H; H)$ は主ファイバー束の構造をもつ．

§2. Serre のファイバー空間

ファイバー空間においてホモトピー理論を考察するとき，ファイバー空間よりもこれから定義する Serre のファイバー空間の方が取り扱い易い定義になっている．しかしファイバー空間ならば Serre のファイバー空間であるから，Serre のファイバー空間でなりたつことはファイバー空間でなりたっているわけである．



ここで，この章でよく用いるつぎの記号をまとめておこう．

I = 閉区間 $[0, 1] = \{t \in \boldsymbol{R} | 0 \leqq t \leqq 1\}$

$I^n = \{(t_1, \cdots, t_n) | t_i \in I, i = 1, \cdots, n\}$

$I^{n-1} = \{(t_1, \cdots, t_{n-1}, 0) \in I^n\}$

$\dot{I}^n = \{(t_1, \cdots, t_n) \in I^n | \prod_{i=1}^{n} t_i(1-t_i) = 0\}$

$J^{n-1} = \dot{I}^{n-1} \times I \cup I^{n-1} \times 1$

なお $n = 0$ のとき $I^0 = \{0\}$, $\dot{I}^0 = \phi$, $J^0 = \{1\}$ と約束しておく．

(1) 多面体

以下の話に必要な範囲で簡単に多面体について説明しておこう．

N を十分大きくとり，N 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N$ を考える．$\boldsymbol{R}^N$ の $(p+1)$ 個の点 $v_0, v_1, \cdots, v_p$ が

$$\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0, \quad \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 0, \lambda_i \in \boldsymbol{R}$$

ならば

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$$

をみたすとき，$v_0, v_1, \cdots, v_p$ は**独立**であるという．

$\boldsymbol{R}^N$ に $p+1$ 個の独立な点 $v_0, v_1, \cdots, v_p$ をとるとき，$\boldsymbol{R}^N$ の部分空間

$$\{x \in \boldsymbol{R}^N | x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i, \ \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geqq 0, i = 0, 1, \cdots, p\}$$

を $v_0, v_1, \cdots, v_p$ を頂点とする p 次元**単体**といい，$\sigma = \sigma^p = [v_0, v_1, \cdots, v_p]$ で表わす．単体 $\sigma = [v_0, v_1, \cdots, v_p]$ の特定の点 $b = \dfrac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} v_i$ を σ の**重心**という．

例 147. R^N において，0次元単体は1点，1次元単体は線分，2次元単体は3角形（内部を含む）のことである．

p 次元単体 $\sigma^p = [v_0, v_1, \cdots, v_p]$ に対して，$v_0, v_1, \cdots, v_p$ の部分集合 $v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_q}$ から作られる q 次元単体 $\tau^q = [v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_q}]$ $(0 \leqq q \leqq p)$ を σ^p の**辺**という．p 次元単体 σ^p の辺 τ^q $(0 \leqq q < p)$ 全体の和集合を $\partial\sigma^p$ で表わす．

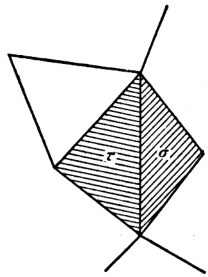
これだけ準備して，さて多面体を定義しよう．

定義 P を（十分大きい次元 N の）ユークリッド空間 R^N の部分空間とする．P が**有限多面体**であるとは

（1） 有限個の単体 σ_i が存在して，P はそれらの和集合で表わされる：$P = \bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i$.

（2） P に属する任意の単体 σ に対して，σ のすべての辺はまた P に属する．

（3） P に属する任意の2つの単体 σ, τ に対して，$\sigma \cap \tau$ は空でないならば，それは σ の辺であり，かつ τ の辺である．

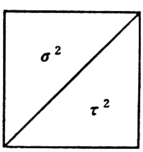


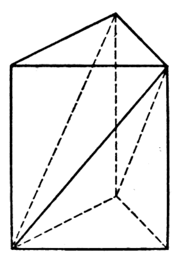
の3つの条件をみたすことである．多面体 P を上記の (1), (2), (3) の条件をみたす単体の和集合にわけることを，P を**単体分割**する（または P に**単体的複体**の構造を与える）という．多面体の単体分割の仕方は1通りではない．

有限多面体 P の部分空間 Q に対して，P のある単体分割 $P = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i$ をとるとき，Q が P を構成する単体の一部分 $Q = \bigcup \sigma_{i_k}$ からなり，$Q = \bigcup \sigma_{i_k}$ 自身多面体の条件 (2), (3) をみたしているとき，Q を P の**部分多面体**という．

例 148. 単体 σ は有限多面体であり，$\partial\sigma$ は σ の部分多面体である．

例 149. I^n は有限多面体である．そのためには I^n が有限多面体の条件をみたすように単体分割できることを示さなければならない．$n=1$ のとき I は1次元単体である．$n=2$ のとき I^2 は左図のように2つの2次元単体からなる有限多面体である．$n=3$ のときには右図のように分割された有限多面体を2つ（こちらの面で）はり合せることにより I^3 の1つの単体分割を得る．一般に P



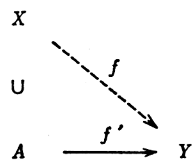


が有限多面体であるとき $P\times I$ が有限多面体であることも前頁の右図のように分割をすることにより示されるので，n に関する帰納法を用いると I^n が有限多面体であることがわかる（詳細は省略する）．このとき I^{n-1}, $\dot{I}^n$, J^{n-1} はそれぞれ I^n の部分多面体である．（この意味は I^{n-1}, $\dot{I}^n$, J^{n-1} が I^n を構成する単体の1部分からなるように I^n ; I^{n-1}, $\dot{I}^n$, J^{n-1} を単体に分割することができるということである）．

（2）レトラクトと強変位レトラクト

定義　X を位相空間，A を X の部分空間とし，$i: A\to X$ を包含写像とする．$ri=1_A$ をみたす連続写像 $r: X\to A$ が存在するとき A は X の**レトラクト**であるといい，写像 r を（A の X における）**レトラクション**（または**引きこみ**）という．

補題 130.　X を位相空間とし A をその部分空間とする．A が X のレトラクトであるならば，任意の位相空間 Y に対して任意の連続写像 $f': A\to Y$ は連続写像 $f: X\to Y$ に拡張される．

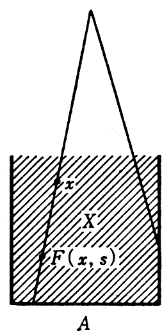


証明　$r: X\to A$ をレトラクションとする．連続写像 $f': A\to Y$ に対して，写像 $f: X\to Y$ を $f=f'r$ と定義すると f は連続でありかつ f' の拡張になっている．

定義　X を位相空間とし，A をその部分空間とする．

$$\begin{cases} F(x,0)=x & x\in X \\ F(x,1)\in A & \\ F(a,s)=a & a\in A,\ s\in I \end{cases}$$

をみたす連続写像 $F: X\times I\to X$ が存在するとき，A は X の**強変位レトラクト**であるといい，写像 F を A の X における**強変位レトラクション**という．



補題 131.　A, B を位相空間 X の部分空間とし，かつ $A\supset B$ とする．

（1）A が X の強変位レトラクトであるならば，A は X のレトラクトである．

（2）B が A の強変位レトラクトでありかつ A が X の強変位レトラクトであるならば，B は X の強変位レトラクトである．

証明　（1）$F: X\times I\to X$ を A の強変位レトラクションとするとき，写像 $r: X\to A$, $r(x)=F(x,1)$ は A のレトラクションを与えている．

（2）$F_B: A\times I\to A$, $F_A: X\times I\to X$ をそれぞれ B, A の強変位レトラクションと

するとき，写像 $F: X\times I\to X$,

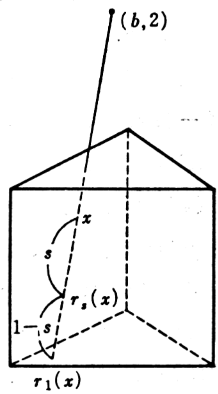
$$F(x, s)=\begin{cases} F_A(x, 2s) & 0\leqq s\leqq 1/2 \\ F_B(F_A(x, 1), 2s-1) & 1/2\leqq s\leqq 1 \end{cases}$$

は B の X における強変位レトラクションを与えている．

つぎの補題は有限多面体のもつ重要な性質である．

補題 132. Pを有限多面体とし，Qをその部分多面体とする．このとき $P\times 0\cup Q\times I$ は $P\times I$ の強変位レトラクトである．

証明 Pを単体に分割して：$P=\cup\,\sigma_i$, Q はその単体の1部分からなりたっているようにしておく．そして Q に含まれない Pの単体を次元の低いものから順に $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m$ とする． $Q_i=Q\cup\sigma_1\cup\cdots\cup\sigma_i$, $1\leqq i\leqq m$ とおくと Q_i は Pの部分多面体である．また $Q_0=Q$ とおけば Q_{i-1} は Q_i の部分多面体で $(i=1, \cdots, m)$, $Q_m=P$ である．まず $P\times 0\cup Q_{i-1}\times I$ が $P\times 0\cup Q_i\times I$ の強変位レトラクトであることを示そう．実際，単体 $\sigma=\sigma_i$ の重心を b とし，$\sigma\times[0, 2]$ において点 $(b, 2)$ と $\sigma\times I$ の点 x を直線で結ぶと，その直線は，$\sigma\times 0\cup\partial\sigma\times I$ とただ1点で交わるのでその点を $r_1(x)$ とする．また x と $r_1(x)$ を結ぶ線分を $s:1-s$ の比に内分する点を $r_s(x)$ とする．このとき写像 $r:\sigma\times I\times I\to\sigma\times I$, $r(x, s)=r_s(x)$ は $\sigma\times 0\cup\partial\sigma\times I$ の $\sigma\times I$ における強変位レトラクションである．さて写像



$$F_i: (P\times 0\cup Q_i\times I)\times I \longrightarrow P\times 0\cup Q_i\times I$$

$$F_i(x, s)=\begin{cases} x & x\in P\times 0\cup Q_{i-1}\times I \\ r(x, s) & x\in\sigma\times I \end{cases}$$

を定義すると F_i は $P\times 0\cup Q_{i-1}\times I$ の $P\times 0\cup Q_i\times I$ における強変位レトラクションを与えている．この操作を $i=1, \cdots, m$ に対して順次行なって補題131 (2) を用いると $P\times 0\cup Q\times I$ が $P\times I$ の強変位レトラクトであることがわかる．

例 150. $I^n\times 0\cup\dot{I}^n\times I$ は（また $I^n\times 1\cup\dot{I}^n\times I$ も）$I^n\times I$ の強変位レトラクトである（補題132）．

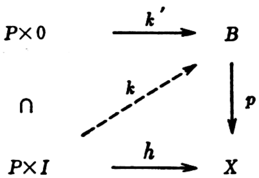
例 151. J^{n-1} は I^n の強変位レトラクトである．実際，$J^{n-1}=I^{n-1}\times 1\cup\dot{I}^{n-1}\times I$ は $I^n=I^{n-1}\times I$ の強変位レトラクトである（例150）．

例 152. $I^n\times\dot{I}\cup J^{n-1}\times I$ は $I^n\times I$ の強変位レトラクトである．実際，写像 f:

$I^n \times I \to I^n \times I$ を $f(t_1, \cdots, t_n, s) = (t_1, \cdots, t_{n-1}, s, 1-t_n)$ と定義すると f は同相写像でありかつ f は $I^n \times 0 \cup \dot{I}^n \times I$ を $I^n \times \dot{I} \cup J^{n-1} \times I$ に移す．しかるに $I^n \times 0 \cup \dot{I}^n \times I$ は $I^n \times I$ の強変位レトクトである（例150）から $I^n \times \dot{I} \cup J^{n-1} \times I$ も $I^n \times I$ の強変位レトラクトである．

（3） Serre のファイバー空間

定義　(B, p, X) が **Serre のファイバー空間**であるとはつぎの3つの条件をみたすことである．



（1）　B, X は位相空間である．

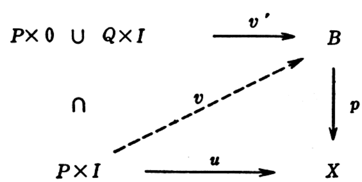
（2）　$p: B \to X$ は連続な全射である．

（3）　任意の有限多面体 P，および任意の連続写像 h：$P \times I \to X$ と $pk' = h|(P \times 0)$ をみたす任意の連続写像 $k': P \times 0 \to B$ に対して，k' の拡張でありかつ $pk = h$ をみたす連続写像 $k: P \times I \to B$ が存在する．

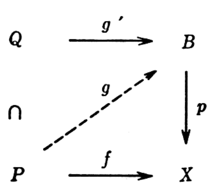
(3) の条件がなりたつことを (B, p, X) は**有限多面体 P に対して被覆ホモトピー性質**をもつともいう．

(3) の性質はつぎの (4), (5) の条件とそれぞれ同値である．

（4）　任意の有限多面体 P とその部分多面体 Q，および任意の連続写像 $u: P \times I \to X$ と $pv' = u|(P \times 0 \cup Q \times I)$ をみたす任意の連続写像 $v': P \times 0 \cup Q \times I \to B$ に対して，v' の拡張でありかつ $pv = u$ をみたす連続写像 v：$P \times I \to B$ が存在する．



（5）　任意の有限多面体 P と P の強変位レトラクトである部分多面体 Q，および任意の連続写像 $f: P \to X$ と $pg' = f|Q$ をみたす任意の連続写像 $g': Q \to B$ に対して，g' の拡張でありかつ $pg = f$ をみたす連続写像 $g: P \to B$ が存在する．



同値の証明　(3)⇒(4)　P を単体に分解し，Q の単体が P の単体の1部分からなりたっているようにしておく．Q に含まれない P の単体を次元の低いものから順に $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$ とする．$\sigma = \sigma_1$ に対して，$h = u|(\sigma \times I)$，$k' = v'|(\sigma \times 0)$ とおくと $pk' = h|(\sigma \times 0)$ をみたしているから (3) より k' の拡張であってかつ $pk = h$ をみたす連続写像 $k: \sigma \times I \to$

B が存在する．さて写像 $v_1: P\times 0\cup(Q\cup\sigma_1)\times I\to B$ を

$$v_1(x)=\begin{cases} v'(x) & x\in P\times 0\cup Q\times I \\ k(x) & x\in\sigma\times I\end{cases}$$

と定義すると v_1 は連続写像で v' の拡張でありかつ $pv_1=u|(P\times 0\cup(Q\cup\sigma_1)\times I)$ をみたしている．この操作を $\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ に対して順に行うと求める連続写像 $v=v_m: P\times I\to B$ が得られる．

(4)⇒(5)　Q は P の強変位レトラクトであるから

$$F(x,0)\in Q,\quad F(x,1)=x,\quad F(y,s)=y\qquad(y\in Q,\ s\in I)$$

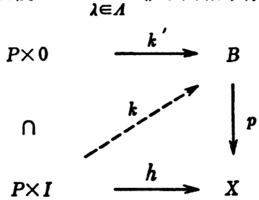
をみたす連続写像 $F: P\times I\to P$ が存在する．写像 $u: P\times I\to X$, $v': P\times 0\cup Q\times I\to B$ をそれぞれ $u=fF$, $v'=g'F$ と定義すると $pv'=u|(P\times 0\cup Q\times I)$ をみたすので (4) より v' の拡張であってかつ $pv=u$ をみたす連続写像 $v: P\times I\to B$ が存在する．さて写像 $g: P\to B$ を $g(x)=v(x,1)$ と定義すると g は連続であり，g' の拡張であってかつ $pg=f$ をみたしている．

(5)⇒(3)　$P\times 0$ は $P\times I$ の強変位レトラクトである（補題 132）であるから (3) は (5) の特別の場合である．

つぎの命題は重要である．

命題 133.　ファイバー空間 (B,p,X,F) は Serre のファイバー空間 (B,p,X) である．

証明　(B,p,X,F) はファイバー空間であるから X の開被覆 $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ と同相写像 $\varphi_\lambda: U_\lambda\times F\to p^{-1}(U_\lambda)$ が存在する．さて連続写像 $h: P\times I\to X$ と $pk'=h|(P\times 0)$ をみたす連続写像 $k': P\times 0\to B$ が与えられたとす．このとき $h^{-1}(U_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$ は $P\times I$ の開被覆である．P, I はコンパクトな距離空間であるから P の有限開被覆 W_i, $i=1,\cdots,m$ と I の有限開被覆 I_j, $j=1,\cdots,r$ をとり各 $W_i\times I_j$ はある $h^{-1}(U_\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$ に属するようにすることができる（補題 53）．この I_j は I の開区間で，I_j は I_{j-1} と I_{j+1} 以外とは交わらないとしておいてもよい $(j=2,\cdots,s-1)$．点 $t_j\in I_j\cap I_{j+1}$ $(0=t_0<t_1<\cdots<t_s=1)$ を選んでおく．また P を十分細かい単体に分割して各単体 σ はある W_i $(i=1,\cdots,m)$ に含まれるようにしておく（補題 53）．さて写像 k が $P\times[t_{j-1},t_j]$ で定義されたとして k を $P\times[t_j,t_{j+1}]$ に拡張にできることを示そう．P の各単体 σ に対して $h(\sigma\times[t_j,$



$t_{j+1}]) \subset U_\lambda$ となるある近傍 U_λ が存在するがこの U_λ を $U_{\lambda(\sigma)}$ と名付けよう．また p_λ：$U_\lambda \times F \to F$ を F への射影とする．σ が P の 0 次元単体であるときは，$k : \sigma \times [t_j, t_{j+1}] \to B$ を

$$k(\sigma, t) = \varphi_{\lambda(\sigma)}(h(\sigma, t), p_{\lambda(\sigma)}(\varphi_{\lambda(\sigma)}{}^{-1}k(\sigma, t_j)))$$

と定義する．k が $P^{n-1} \times [t_j, t_{j+1}]$（$P^{n-1}$ は P の $n-1$ 次元以下の単体の和集合）まで定義されたと仮定しよう．σ を P の n 次元単体とすると $\sigma \times t_j \cup \partial\sigma \times [t_j, t_{j+1}]$ は $\sigma \times [t_j, t_{j+1}]$ の（強変位）レトラクトである（補題 132）からそのレトラクションを r とする．k はすでに $\sigma \times t_j \cup \partial\sigma \times [t_j, t_{j+1}]$ で定義されているので $k : \sigma \times [t_j, t_{j+1}] \to B$ を

$$k(x, t) = \varphi_{\lambda(\sigma)}(h(x, t), p_{\lambda(\sigma)}(\varphi_{\lambda(\sigma)}{}^{-1}(k(r(x, t)))))$$

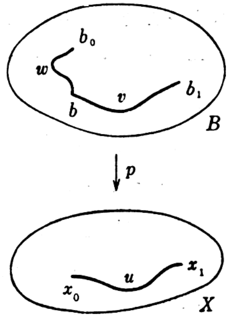
と定義する．よって k は $P \times [t_j, t_{j+1}]$ 上で定義された．このようにして定義された写像 $k : P \times I \to B$ は連続でありかつ k' の拡張であって $pk = h$ をみたしている．

(4) ファイバー空間の道

補題 134. (B, p, X) を Serre のファイバー空間とし点 $x_0 \in X$, $b_0 \in p^{-1}(x_0)$ を与える．このとき x_0 を始点とする X の道 u に対して b_0 を始点としかつ $pv = u$ をみたす B の道[†] v が存在する．

証明 連続写像 $u : I \to X$ と $v' : \{0\} \to B$, $v'(0) = b_0$ に対して被覆ホモトピー性質を用いると $v(0) = b_0$ かつ $pv = u$ をみたす連続写像 $v : I \to B$ が存在する．

補題 135. (B, p, X) を Serre のファイバー空間とし，X は弧状連結であるとする．このとき X のある点 x_0 のファイバー $p^{-1}(x_0)$ の任意の 2 点 b, b' が B の道で結べるならば，B は弧状連結である．



証明 $p^{-1}(x_0)$ の 1 点 b_0 をとり固定しておく．b_1 を B の任意の点とし $p(b_1) = x_1$ とおく．X は弧状連結であるから x_1 と x_0 を道 u で結び，つぎに b_1 を始点とし u を被覆する道 v をとる（補題 134）．道 v の終点を b とすると $b \in p^{-1}(x_0)$ であるから仮定より b と b_0 は道 w で結ぶことができる．このとき $v \cdot w$ は b_1 と b_0 を結ぶ道である．よって B は弧状連結である．

補題 135 の特別の場合としてつぎの命題が得られる．

命題 136. ファイバー空間 (B, p, X, F) において X, F

[†] X の道 u に対し $pv = u$ をみたす B の道 v を u を被覆する道という．

が弧状連結であれば B も弧状連結である.

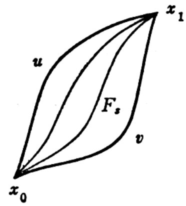
ファイバー空間 $U(n)/U(n-1)=S^{2n-1}$, $Sp(n)/Sp(n-1)=S^{4n-1}$, $SO(n)/SO(n-1)=S^{n-1}$, $SU(n)/SU(n-1)=S^{2n-1}$ (定理50) に命題136を用いると，球面の弧状連結である (定理4) ことと分母の群の弧状連結である (これは帰納法の仮定とする) ことより群 $U(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$, $SU(n)$ が弧状連結であることがわかる．これは定理20 (1) の別証明になっている.

§3. 基　本　群

位相空間の基本群を定義しよう．射影空間および古典群の基本群を求めるのがこの章の主な目的であるがその目的は4, 7節で達せられる.

(1) 道のホモトピー

X を位相空間とし，x_0, x_1 を X の2点とする．x_0 と x_1 を結ぶ道 $u: I\to X$ 全体の集合を $\Omega(X; x_0, x_1)$ で表わす. $\Omega(X; x_0, x_1)$ の2つの道 u, v に対して



$$\begin{cases} F(t,0)=u(t), & F(0,s)=x_0 \\ F(t,1)=v(t), & F(1,s)=x_1 \end{cases}$$

をみたす連続写像 $F: I\times I\to X$ が存在するとき u と v は**ホモトープ**であるといい，$u\sim v$ または $u\sim v\,(F)$ で表わす．F を u と v を結ぶ**ホモトピー**という.

補題 137. X を位相空間とする. $\Omega(X; x_0, x_1)$ において

$$u\sim v \iff u \text{ と } v \text{ はホモトープである}$$

と定義すると関係 $\sim$ は同値法則をみたす.

証明 $u\sim u$ である．実際，写像 $F: I\times I\to X$ を $F(t,s)=u(t)$ と定義すると $u\sim u\,(F)$ である．つぎに $u\sim v\,(F)$ とするとき，写像 $F': I\times I\to X$ を $F'(t,s)=F(t, 1-s)$ と定義すると $v\sim u\,(F')$ である．最後に $u\sim v\,(F_1)$, $v\sim w\,(F_2)$ とするとき，写像 $F: I\times I\to X$ を

$$F(t,s)=\begin{cases} F_1(t, 2s) & 0\leqq s\leqq 1/2 \\ F_2(t, 2s-1) & 1/2\leqq s\leqq 1 \end{cases}$$

と定義すると F は u と w を結ぶホモトピーである．よって $u\sim w$ である.

位相空間 X の1点 x を固定し，$u: I\to X$ を $u(t)=x$ と定義すると u は X の1つの道であるが，この道 u を 0_x または単に0で表わす.

補題 138. X を位相空間とし，x_0, x_1, x_2 を X の点とし，かつ u, v は x_0, x_1 を結ぶ道，u', v' は x_1 と x_2 を結ぶ道とするとき，

(1) $u \sim v,\ u' \sim v'$ ならば $u \cdot u' \sim v \cdot v'$

(2) $u \sim v$ ならば $\bar{u} \sim \bar{v}$

(3) さらに w を2点 x_2 と x_3 を結ぶ道とするとき $(u \cdot v) \cdot w \sim u \cdot (v \cdot w)$

(4) $u \cdot 0_{x_1} \sim u, \quad 0_{x_0} \cdot u \sim u$

(5) $u \cdot \bar{u} \sim 0_{x_0}, \quad \bar{u} \cdot u \sim 0_{x_1}$

がなりたつ．

証明 (1) $u \sim v\,(F),\ u' \sim v'(F')$ とするとき，写像 $F_1 : I \times I \to X$ を

$$F_1(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & 0 \leqq t \leqq 1/2 \\ F'(2t-1, s) & 1/2 \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

と定義すると $u \cdot u' \sim v \cdot v'(F_1)$ である．

(2) $u \sim v\,(F)$ とするとき，写像 $\bar{F} : I \times I \to X$ を $\bar{F}(t, s) = F(1-t, s)$ と定義すると $\bar{u} \sim \bar{v}\,(\bar{F})$ である．

(3) $(u \cdot v) \cdot w,\ u \cdot (v \cdot w)$ はそれぞれ

$$((u \cdot v) \cdot w)(t) = \begin{cases} u(4t) & 0 \leqq t \leqq 1/4 \\ v(4t-1) & 1/4 \leqq t \leqq 1/2 \\ w(2t-1) & 1/2 \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

$$(u \cdot (v \cdot w))(t) = \begin{cases} u(2t) & 0 \leqq t \leqq 1/2 \\ v(4t-2) & 1/2 \leqq t \leqq 3/4 \\ w(4t-3) & 3/4 \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

であるから写像 $F : I \times I \to X$ を

$$F(t, s) = \begin{cases} u(4t/(1+s)) & 0 \leqq t \leqq (1+s)/4 \\ v(4t-1-s) & (1+s)/4 \leqq t \leqq (2+s)/4 \\ w((4t-s-2)/(2-s)) & (2+s)/4 \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

と定義すると F は $(u \cdot v) \cdot w$ と $u \cdot (v \cdot w)$ を結ぶホモトピーである．

(4)
$$(u \cdot 0_{x_1})(t) = \begin{cases} u(2t) & 0 \leqq t \leqq 1/2 \\ x_1 & 1/2 \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

であるから写像 $F : I \times I \to X$ を

$$F(t, s) = \begin{cases} u(2t/(1+s)) & 0 \leqq t \leqq (1+s)/2 \\ x_1 & (1+s)/2 \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

と定義すると F は $u \cdot 0_{x_1}$ と u を結ぶホモトピーである．$0_{x_0} \cdot u \sim u$ も同様に証明できる．

（5）
$$(u \cdot \bar{u})(t) = \begin{cases} u(2t) & 0 \leqq t \leqq 1/2 \\ u(2-2t) & 1/2 \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

であるから写像 $F: I \times I \to X$ を

$$F(t, s) = \begin{cases} u(2t(1-s)) & 0 \leqq t \leqq 1/2 \\ u((2-2t)(1-s)) & 1/2 \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

と定義すると F は $u \cdot \bar{u}$ と 0_{x_0} を結ぶホモトピーである．$\bar{u} \cdot u \sim 0_{x_1}$ も同様に証明できる．

（2） 基　本　群

X を位相空間とし，X の 1 点 x_0 をとり固定しておく，X の道 u の始点と終点がともに x_0 であるとき，u を x_0 における**閉道**（または**ループ**）という．x_0 における 2 つの閉道 u, v の積 $u \cdot v$ および閉道 u の逆の道 $\bar{u}$ もまた x_0 における閉道である．また $0 = 0_{x_0}$ も明らかに x_0 における閉道である．x_0 における閉道全体の集合を $\Omega(X, x_0)$ で表わす(193 頁の記号によると $\Omega(X ; x_0, x_0)$ のことである)．補題 138 において $x_1 = x_2 = x_3 = x_0$ とし，それを再記しておこう．

補題 139. X を位相空間とし $x_0 \in X$ とする．$\Omega(X, x_0)$ において

（1） $u \sim v,\ u' \sim v'$ ならば $u \cdot u' \sim v \cdot v'$

（2） $u \sim v$ ならば $\bar{u} \sim \bar{v}$

（3） $(u \cdot v) \cdot w \sim u \cdot (v \cdot w)$

（4） $u \cdot 0 \sim u, \quad 0 \cdot u \sim u$

（5） $u \cdot \bar{u} \sim 0, \quad \bar{u} \cdot u \sim 0$

がなりたつ．

$\Omega(X, x_0)$ のホモトピー関係 $\sim$ による等化集合 $\Omega(X, x_0)/\sim$ を $\pi_1(X, x_0)$ で表わし，かつ $u \in \Omega(X, x_0)$ を含む類を $[u]$ で表わす．$\pi_1(X, x_0)$ の 2 つの元 $[u], [v]$ の積を

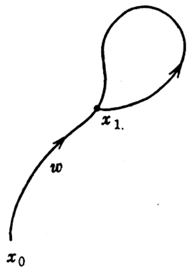
$$[u][v] = [u \cdot v]$$

と定義する．補題 139 はこの積が代表元 u, v のとり方によらず定義され，かつ $\pi_1(X, x_0)$ がこの積に関して群をつくることを示している．実際，群 $\pi_1(X, x_0)$ の単位元は $[0]$ であり $[u]$ の逆元は $[\bar{u}]$ である．このようにして得られた群 $\pi_1(X, x_0)$ を位相空間 X の $\boldsymbol{x_0}$ **を基点とする基本群**という．基本群 $\pi_1(X, x_0)$ は一般には可換群であるとは限らない

が，可換群であるときには群の算法を加法で表わすのが普通である．たとえば $\pi_1(X, x_0)$ がただ1つの元からなる群であるとき $\pi_1(X, x_0)=0$ と表わし，$\pi_1(X, x_0)$ が2つの元からなる群であるとき $\pi_1(X, x_0)=\boldsymbol{Z}_2$ と表わすのである．$\pi_1(X, x_0)=0$ のとき X は**基点 x_0 に関して単連結**であるという．

（3） 基点のとりかえ

位相空間 X の基本群は基点 x_0 を指定することによって定義されたがこの基点をとりかえることを考えよう．x_0, x_1 を X の2点とし，x_0, x_1 を結ぶ道 w が存在したとする．この道 w を用いて写像 $w_\sharp : \Omega(X, x_1)\to\Omega(X, x_0)$ を



$$w_\sharp(u)=(w\cdot u)\cdot\overline{w}$$

と定義する．$u, v\in\Omega(X, x_1)$ が $u\sim v$ ならば $w_\sharp(u)\sim w_\sharp(v)$ である（補題138）から $w_\sharp$ は写像

$$w_* : \pi_1(X, x_1)\longrightarrow\pi_1(X, x_0)$$

を誘導する．この w_* が群の同型写像であることを示そう．

（$(u\cdot v)w\sim u\cdot(v\cdot w)$（補題138(3)）であるからホモトピー関係を無視していましばらく括弧をつけずに単に $u\cdot v\cdot w$ で表わすことにする）．$w_\sharp(u\cdot v)\sim w\cdot(u\cdot v)\cdot\overline{w}\sim w\cdot u\cdot 0\cdot v\cdot\overline{w}\sim w\cdot u\cdot\overline{w}\cdot w\cdot v\cdot\overline{w}\sim w_\sharp(u)\cdot w_\sharp(v)$（補題138）であるから $w_*([u][v])=w_*([u])w_*([v])$ となる．よって w_* は準同型写像である．$\overline{w}$ は x_1 と x_0 を結ぶ道であるので，同様に $\overline{w}$ は準同型写像 $\overline{w}_* : \pi_1(X, x_0)\to\pi_1(X, x_1)$, $\overline{w}_*([u])=[\overline{w}\cdot u\cdot w]$ を誘導するが w_* と $\overline{w}_*$ は $\overline{w}_*w_*=1$, $w_*\overline{w}_*=1$ をみたしている．実際，$\overline{w}_*w_*[u]=\overline{w}_*([w\cdot u\cdot\overline{w}])=[\overline{w}\cdot w\cdot u\cdot\overline{w}\cdot w]=[0_{x_1}\cdot u\cdot 0_{x_1}]=[u]$ であるから $\overline{w}_*w_*=1$ である．$w_*\overline{w}_*=1$ も同様に証明できる．したがって w_* は群の同型写像である．以上のことをつぎの命題にまとめておこう．

命題 140． X を位相空間，x_0, x_1 を X の2点とし．w を x_0 と x_1 を結ぶ道とする．このとき写像

$$w_* : \pi_1(X, x_1)\longrightarrow\pi_1(X, x_0)$$
$$w_*([u])=[w\cdot u\cdot\overline{w}]$$

は群の同型写像である．

位相空間 X が弧状連結であれば，X の任意の2点 x, x' は道で結べるので x, x' を基点とする X の基本群は群として同型である：$\pi_1(X, x')\cong\pi_1(X, x)$．したがってこの群は基点 x のとり方に関係せず X のみで定まる群と考えて $\pi_1(X)$ で表わし，X の**基本群**

という．弧状連結空間 X の基本群 $\pi_1(X)$ がただ1つの元からなる群であるとき，すなわち $\pi_1(X)=0$ のとき X は**単連結**であるという．

補題 141. X を単連結空間とし，X の2点 x_0, x_1 を任意に与える．このとき x_0, x_1 を結ぶ X の任意の2つの道 u, v はホモトープである．

証明 $u\cdot\bar{v}$ は x_0 における閉道であるから $\pi_1(X, x_0)=0$ の仮定より $u\cdot\bar{v}\sim 0_{x_0}$ である．よって $u\sim u\cdot 0_{x_1}\sim u\cdot(\bar{v}\cdot v)\sim(u\cdot\bar{v})\cdot v\sim 0_{x_0}\cdot v\sim v$ (補題138) である．

(4) 連続写像より誘導される基本群の準同型写像

X, Y を位相空間とし，X, Y からそれぞれ1点 x_0, y_0 をとり固定しておく．また連続写像 $f:(X, x_0)\to(Y, y_0)$ が与えられたとする．このとき x_0 における X の閉道 u に対して fu は y_0 における閉道となるので，写像 $f_\sharp:\Omega(X, x_0)\to\Omega(Y, y_0)$ を

$$f_\sharp(u)=fu$$

と定義する．$u, v\in\Omega(X, x_0)$ が $u\sim v(F)$ ならば $fu\sim fv(fF)$ であるから，$f_\sharp$ は写像

$$f_*:\pi_1(X, x_0)\longrightarrow\pi_1(Y, y_0)$$

を誘導する．f_* は群の準同型写像である．実際，$u, v\in\Omega(X, x_0)$ に対して明らかに $f(u\cdot v)=(fu)\cdot(fv)$ がなりたつので $f_*([u][v])=f_*([u])f_*([v])$ となるからである．この写像 f_* を連続写像 $f:X\to Y$ より**誘導された(基本群の)準同型写像**という．これに関してつぎの補題がなりたつ．

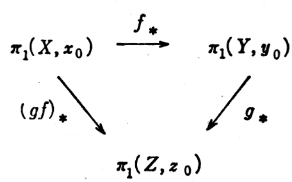
補題 142. X, Y, Z は位相空間とし，点 $x_0\in X, y_0\in Y, z_0\in Z$ を与える．

(1) 恒等写像 $1:X\to X$ に対して $1_*:\pi_1(X, x_0)\to\pi_1(X, x_0)$ も恒等写像である：$1_*=1$

(2) 連続写像 $f:(X, x_0)\to(Y, y_0)$, $g:(Y, y_0)\to(Z, z_0)$ に対して

$$(gf)_*=g_*f_*$$

がなりたつ．



命題 143. X, Y を位相空間とし，点 $x_0\in X, y_0\in Y$ を与える．このときつぎの2つの群は群として同型である．

$$\pi_1(X\times Y, (x_0, y_0))\cong\pi_1(X, x_0)\times\pi_1(Y, y_0)$$

特に X, Y が単連結であれば直積空間 $X\times Y$ も単連結である．

証明 $p:X\times Y\to X$, $q:X\times Y\to Y$ をそれぞれ X, Y への射影とし，かつ写像 $i:X\to X\times Y$, $j:Y\to X\times Y$ をそれぞれ $i(x)=(x, y_0)$, $j(y)=(x_0, y)$ と定義すると，

$pi=1,\ pj(y)=x_0$；$qj=1,\ qi(x)=y_0$ であるから

$$p_*i_*=1,\ p_*j_*=0\ ;\ q_*j_*=1,\ q_*i_*=0$$

がなりたつ（補題 142）．さて写像 $\varphi:\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\to\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$ を

$$\varphi(\gamma)=(p_*(\gamma),\ q_*(\gamma))$$

と定義すると，$p_*,\ q_*$ が準同型写像であるから φ は準同型写像である．φ は全射である．実際，$(\alpha,\beta)\in\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$ に対して元 $\gamma=i_*(\alpha)j_*(\beta)$ をとると

$$\begin{aligned}\varphi(\gamma)&=(p_*(i_*(\alpha)j_*(\beta)),\ q_*(i_*(\alpha)j_*(\beta)))\\&=((p_*i_*(\alpha))(p_*j_*(\beta)),\ (q_*i_*(\alpha))(q_*j_*(\beta)))\\&=(p_*i_*(\alpha),\ q_*j_*(\beta))=(\alpha,\beta)\end{aligned}$$

となる．よって φ は全射である．また φ は単射である．実際，$\gamma=[w]\in\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))$ が $\varphi(\gamma)=0$，すなわち $(p_*[w],\ q_*[w])=0$ とする．これは $pw\sim 0_{x_0}(F_1)$，$qw\sim 0_{y_0}(F_2)$ であることを意味している．このホモトピー $F_1:I\times I\to X$，$F_2:I\times I\to Y$ を用いて写像 $F:I\times I\to X\times Y$ を $F=F_1\times F_2$ と定義すると F は w と $0_{(x_0,y_0)}$ を結ぶホモトピーになる：$w\sim 0_{(x_0,y_0)}(F)$．よって $\gamma=[w]=0$ となり φ が単射であることがわかった．以上で φ は群の同型写像であることがわかり，命題が証明された．

例 153. $\boldsymbol{R}$ は単連結である．実際，$\boldsymbol{R}$ は弧状連結であるから $\pi_1(\boldsymbol{R},0)=0$ を示すとよい．$u:I\to\boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{R}$ の原点 0 における任意の閉道とするとき，写像 $F:I\times I\to\boldsymbol{R}$，$F(t,s)=u(t)(1-s)$ は u と 0 を結ぶホモトピーである：$u\sim 0(F)$．よって $[u]=0$ となり $\boldsymbol{R}$ が単連結であることがわかった．したがってその直積空間である $\boldsymbol{R}^n$ も単連結である（命題 143）．また $U_\varepsilon(x)$ を $\boldsymbol{R}^n$ における点 x の ε-近傍とするとき（$U_\varepsilon(x)$ と $\boldsymbol{R}^n$ は同相であるから）$U_\varepsilon(x)$ も単連結である．

（5） 位相群の基本群

位相群の基本群はつねに可換となり，かつ基本群における道の積と群自身の積とは大いに関係しているのである．このことについて述べよう．

G を位相群とする．G の 2 つの道 $u,\ v$ に対して G の道 $uv,\ u^{-1}$ をそれぞれ

$$(uv)(t)=u(t)v(t)$$
$$u^{-1}(t)=(u(t))^{-1}$$

と定義する．u を x と y を結ぶ道，v を a と b を結ぶ道とすると，uv は xa と yb を結ぶ道であり，u^{-1} は x^{-1} と y^{-1} を結ぶ道である．さらに元 $a\in G$ と G の道 u に対して G の道 $au,\ ua$ をそれぞれ

$$(au)(t) = a(u(t))$$

$$(ua)(t) = u(t)a$$

と定義する．すなわち $au = 0_a u$, $ua = u0_a$ である．

補題 144. G を位相群とし，e を G の単位元とする．u, v, u', v' を G の道とするとき

（1） $u \sim v$, $u' \sim v'$ ならば $uu' \sim vv'$

（2） $u \sim v$ ならば $u^{-1} \sim v^{-1}$

（3） $u(1) = v(0)$, $u'(1) = v'(0)$ であれば $(u \cdot v)(u' \cdot v') = (uu') \cdot (vv')$

（4） u を e と a を結ぶ道，v を e と b を結ぶ道とすれば $u \cdot (av) \sim uv \sim v \cdot (ub)$

（5） u を e と a を結ぶ道とすれば $u^{-1} \sim a^{-1}\bar{u}$

がなりたつ．

証明 （1） $u \sim v\,(F)$, $u' \sim v'\,(F')$ とするとき，写像 $F_1 : I \times I \to G$ を $F_1(t, s) = F(t, s)F'(t, s)$ と定義すると $uv \sim u'v'\,(F_1)$ である．

（2） $u \sim v\,(F)$ とするとき，写像 $F_1 : I \times I \to G$ を $F_1(t, s) = (F(t, s))^{-1}$ と定義すると $u^{-1} \sim v^{-1}\,(F_1)$ である．

（3）
$$
\begin{aligned}
(u \cdot v)(u' \cdot v')(t) &= ((u \cdot v)(t))((u' \cdot v')(t)) \\
&= \begin{cases} u(2t)u'(2t) & 0 \leqq t \leqq 1/2 \\ v(2t-1)v'(2t-1) & 1/2 \leqq t \leqq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (uu')(2t) & 0 \leqq t \leqq 1/2 \\ (vv')(2t-1) & 1/2 \leqq t \leqq 1 \end{cases} \\
&= ((uu') \cdot (vv'))(t)
\end{aligned}
$$

（4） $uv \sim (u \cdot 0_a)(0_e \cdot v)$（補題 138 (4)）$= (u0_e) \cdot (0_a v) = u \cdot (av)$．同様に $uv \sim (0_e \cdot u)(v \cdot 0_b) = (0_e v) \cdot (u0_b) = v \cdot (ub)$ である．

（5） 一般に $u \cdot \bar{v} \sim 0$ ならば $u \sim v$ であることに注意しておこう．さて $\overline{a^{-1}\bar{u}} = a^{-1}u$ である．実際，$\overline{a^{-1}\bar{u}}(t) = (a^{-1}\bar{u})(1-t) = a^{-1}(\bar{u}(1-t)) = a^{-1}(u(t)) = (a^{-1}u)(t)$ である．そして $u^{-1} \cdot \overline{a^{-1}\bar{u}} = u^{-1} \cdot (a^{-1}u) \sim u^{-1}u$（(4) による）$= 0_e$ であるから初めの注意より $u^{-1} \sim a^{-1}\bar{u}$ となる．

あとの必要のために補題 144 を少し一般にして述べておいたが，つぎの命題の証明に必要なのは $a = b = e$ のときである．

命題 145. G を位相群とするとき，つぎの (1), (2) がなりたつ．

（1）　G の単位元 e を基点とする基本群 $\pi_1(G, e)$ は可換である．

（2）　$\pi_1(G, e)$ における積はつぎのように定義してもよい．

$$[u][v] = [uv]$$

$$[u]^{-1} = [u^{-1}]$$

証 明　補題 144 (4), (5) において $a = b = e$ とおくと $u\cdot v \sim uv \sim v\cdot u$ および $u^{-1} \sim \bar{u}$ を得る．このことは命題の (1), (2) を示している．

§4. 被 覆 空 間

ファイバーが離散であるファイバー空間はいろいろよい性質をもっている（一方都合の悪いこともあるが），この節では離散ファイバーをもつファイバー空間である被覆空間について述べよう．特に普遍被覆空間の考え方が重要である．

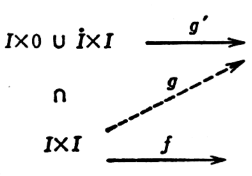
（1） 離散ファイバーをもつファイバー空間

補題 146.　(B, p, X, F) を離散ファイバー F をもつファイバー空間とし，点 $x_0 \in X$, $b_0 \in p^{-1}(x_0)$ を与える．このとき x_0 を始点とする X の道 u に対して，b_0 を始点とし u を被覆する B の道 v がただ1つ存在する．

証 明　道 u に対して補題の道 v が存在することは補題 134 である（命題 133）．v, v' を $v(0) = b_0 = v'(0)$, $pv(t) = u(t) = pv'(t)$ $(t \in I)$ をみたす B の2つの道とするとき，各 $\tau \in I$ に対して $v(\tau) = v'(\tau)$ を示そう．$\tau \in I$ を固定して，写像 $f: I \times I \to X$ を

$$f(t, s) = \begin{cases} u(\tau - 2\tau t + 2\tau ts) & 0 \leqq t \leqq 1/2 \\ u(2\tau s + 2\tau t - \tau - 2\tau ts) & 1/2 \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

と定義すると f は連続である（補題 39）．また写像 $g': I \times 0 \cup \dot{I} \times I \to B$ を



$$\begin{cases} g'(t, 0) = \begin{cases} v(\tau - 2\tau t) & 0 \leqq t \leqq 1/2 \\ v'(2\tau t - \tau) & 1/2 \leqq t \leqq 1 \end{cases} \\ g'(0, s) = v(\tau) \\ g'(1, s) = v'(\tau) \end{cases}$$

と定義すると g' は連続であり（補題 39）かつ $pg' = f|(I \times 0 \cup \dot{I} \times I)$ をみたしている．ゆえに被覆ホモトピー性質より，g' の拡張であってかつ $pg = f$ をみたす連続写像 $g: I \times I \to B$ が存在する．$g(t, 1)$を考えると，$pg(t, 1) = f(t, 1) = u(\tau)$ であるから連続写像 $h: I \to p^{-1}(u(\tau))$, $h(t) = g(t, 1)$ が定義される．しかるに $h(I)$ は離散空間 $p^{-1}(u(\tau))$ の弧状連結集合であるから $h(I)$ は1点のみからなる

(例91). すなわち $g(t, 1)$ は t にかかわらず一定であり, 特に $g(0, 1) = g(1, 1)$ である. よって $v(\tau) = g(0, 1) = g(1, 1) = v'(\tau)$ である.

補題 147. (B, p, X, F) を離散ファイバー F をもつファイバー空間とし, 点 $x_0 \in X$, $b_0 \in p^{-1}(x_0)$ を与える. u, u' を x_0 を始点とする X の2つの道とし, v, v' を b_0 を始点としそれぞれ u, u' を被覆する B の道とする. このとき u と u' がホモトープならば v と v' の終点は一致する.

証明 f を u と u' を結ぶホモトピーとする. すなわち連続写像 $f: I \times I \to X$ は $f(t, 0) = u(t)$, $f(t, 1) = u'(t)$, $f(0, s) = x_0$, $f(1, s) = u(1) = u'(1)$ をみたしている. 写像 $g': I \times 0 \cup \dot{I} \times I \to B$ を

$$\begin{cases} g'(t, 0) = v(t) \\ g'(0, s) = b_0 \\ g'(1, s) = v(1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} I\times 0 \cup \dot{I}\times I & \xrightarrow{\quad g' \quad} & B \\ \cap & \overset{g}{\nearrow} & \downarrow p \\ I\times I & \xrightarrow{\quad f \quad} & X \end{array}$$

と定義すると g' は連続であり (補題39) かつ $pg' = f|(I \times 0 \cup \dot{I} \times I)$ をみたしている. ゆえに被覆ホモトピー性質より, g' の拡張であってかつ $pg = f$ をみたす連続写像 $g: I \times I \to B$ が存在する. 写像 $h: I \to B$, $h(t) = g(t, 1)$ を考えると $h(0) = g(0, 1) = g'(0, 1) = b_0$, $ph(t) = pg(t, 1) = f(t, 1) = u'(t)$ であるから, h も b_0 を始点とし u' を被覆する B の道である. したがって h と v' は一致する (補題146). ゆえに $v(1) = g'(1, 1) = g(1, 1) = h(1) = v'(1)$ である.

(2) 局所弧状連結空間

被覆空間の定義を与える前に位相空間の近傍についての注意を2つ程与えておこう.

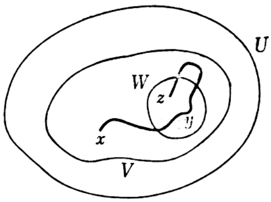
定義 (1) 位相空間 X において, X の任意の点 x と x の任意の近傍 U に対して, x の近傍 V を「$V \subset U$ であり, かつ V の任意の点 y は x と U の道で結べる」をみたすようにとれるとき, X は**局所弧状連結**であるという.

(2) 位相空間 X において, X の任意の点 x と x の任意の近傍 U に対して, x の近傍 V を「$V \subset U$ であり, かつ x における V の任意の閉道 u は U の中を通って0にホモトープである (すなわち $F(t, 0) = u(t)$, $F(t, 1) = x$, $F(0, s) = F(1, s) = x$ をみたす連続写像 $F: I \times I \to U$ が存在する)」をみたすようにとれるとき, X は**局所単連結**であるという.

補題 148. X が局所弧状連結空間ならば, X の任意の点 x と x の任意の近傍 U に対して, x の近傍 V を「$V \subset U$ でありかつ V は弧状連結である」をみたすようにとる

ことができる.

証明　点 x と U の道で結べる U の点全体の集合を V とおくと，$V \subset U$ かつ V は弧状連結な（X の）開集合である．実際，V が弧状連結であることは明らかであるから V が開集合であることを示そう．点 $y \in V$ は $y \in U$ であるから X の局所弧状連結性より，y の近傍 W を「$W \subset U$，かつ W の任意の点 z は y と U の道で結べる」をみたすようにとるとき，W の任意の点は x と U の道で結べるので $W \subset V$ である．これは V が X の開集合であることを示している.



例 154.　$\boldsymbol{R}^n$ の任意の開集合 O は局所弧状連結，局所単連結空間である．実際，点 $x \in O$ の ε 近傍 $U_\varepsilon(x)$（ただし $U_\varepsilon(x) \subset O$ とする）は単連結である（例 153）からである．より一般に，位相多様体は局所弧状連結，局所単連結空間である．実際，位相多様体の各点は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合と同相な近傍をもつからである．したがって球面 S^{n-1}，射影空間 $KP(n-1)$，古典群 $G(n, K)$, $SG(n, K)$ はいずれも位相多様体である（定理 42, 43, 44）から，局所弧状連結，局所単連結である.

（3）被覆空間

定義　(B, p, X) が**被覆空間**であるとはつぎの 3 つの条件をみたすことである.

（1）B, X は位相空間である.

（2）$p : B \to X$ は連続な全射である.

（3）X の各点 x に対して，つぎの（i），(ii)，(iii) をみたす x の近傍 U と $p^{-1}(x)$ の各点 $b_\lambda, b_\mu, \cdots$ の近傍 $U(b_\lambda), U(b_\mu), \cdots$ が存在する.

（i）各点 $b_\lambda \in p^{-1}(x)$ に対し，$p : U(b_\lambda) \to U$ は同相写像である.

(ii)　$p^{-1}(U) = \bigcup_{b_\lambda \in p^{-1}(x)} U(b_\lambda)$

(iii)　$b_\lambda, b_\mu \in p^{-1}(x)$, $b_\lambda \neq b_\mu$ ならば $U(b_\lambda) \cap U(b_\mu) = \phi$

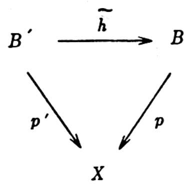
このとき (B, p, X) を X の上の被覆空間，または単に B は X の被覆空間であるという言い方もする．(3) の条件をみたす近傍 $U, U(b_\lambda), \cdots$ を**標準近傍**ということにする.

被覆空間 (B, p, X) において B が局所弧状連結かつ単連結であるとき，(B, p, X) を（または単に B を）X の**普遍被覆空間**という．(B, p, X) が普遍被覆空間であるとき X は局所弧状連結，弧状連結である（命題 59）．以下 (B, p, X) を弧状連結被覆空間などというとき，弧状連結などの位相的性質は B のもつ位相的性質をさすものとする.

定義　位相空間 X の2つの被覆空間 (B, p, X), (B', p', X) に対して

$$p\tilde{h} = p'$$

をみたす同相写像 $\tilde{h}: B' \to B$ が存在するとき，(B, p, X) と (B', p', X) は**被覆空間として同型**であるという．

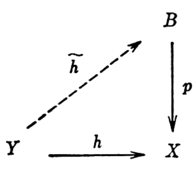


補題 149.　弧状連結被覆空間 (B, p, X) は離散ファイバーをもつファイバー空間である．

証明　各点 $x \in X$ の上のファイバー $p^{-1}(x)$ は離散である．実際，$b_\lambda \in p^{-1}(x)$ の標準近傍 $U(b_\lambda)$ に対して $b_\lambda = p^{-1}(x) \cap U(b_\lambda)$ であるから b_λ は $p^{-1}(x)$ の開集合である．よって $p^{-1}(x)$ は離散である．つぎに X の任意の2点 x, x' に対して，ファイバー $p^{-1}(x)$ と $p^{-1}(x')$ は集合として同型であることを示そう．X は弧状連結であるから x と x' を道 $u: I \to X$ で結ぶ．像 $u(I)$ の各点を標準近傍 U で覆うとき，$u(I)$ はコンパクトであるから有限個の点 $x = x_0, x_1, \cdots, x_m = x'$ をとり $u(I)$ を有限個の標準近傍 $U_{x_0}, U_{x_1}, \cdots, U_{x_m}$ で覆うことができる．また各 i に対し，x_{i+1} は $U(x_i)$ に含まれるとしておいてよい．さて $p^{-1}(x_i)$ の点 $b_{i\lambda}$ は $b_{i\lambda} = p^{-1}(x_i) \cap U(b_{i\lambda})$ と表わされることに注意して，写像 $v_i: p^{-1}(x_i) \to p^{-1}(x_{i+1})$ を $v_i(b_{i\lambda}) = p^{-1}(x_{i+1}) \cap U(b_{i\lambda})$ と定義すると v_i は全単射である．この全単射 v_i を合成すると全単射 $v_{m-1} \cdots v_1 v_0: p^{-1}(x) \to p^{-1}(x')$ を得る．よって $p^{-1}(x) \approx p^{-1}(x')$ である．この集合を F とおくと $p^{-1}(U) \simeq U \times F$ であることは被覆空間の (3) の条件より明らかである．

この補題 149 より，被覆空間 (B, p, X) においては補題 146, 147 の事実がなりたっていることを注意しておこう．

補題 150.　(B, p, X) を弧状連結被覆空間，Y を局所弧状連結な単連結空間とし，点 $x_0 \in X$, $b_0 \in p^{-1}(x_0)$；$y_0 \in Y$ を与える．このとき任意の連続写像 $h: (Y, y_0) \to (X, x_0)$ に対して

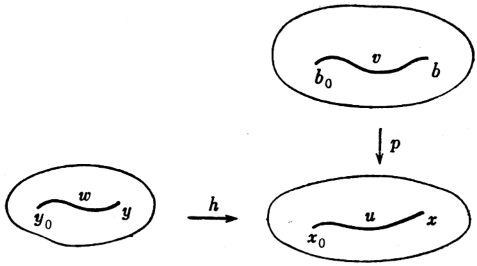


$$p\tilde{h} = h$$

をみたす連続写像 $\tilde{h}: (Y, y_0) \to (B, b_0)$ がただ1つ存在する．

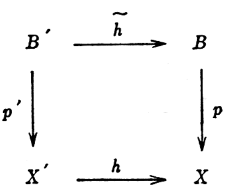
証明　(i)　まず写像 $\tilde{h}: Y \to B$ を定義しよう．点 $y \in Y$ を与える．Y が弧状連結であるから，y_0 と y を道 w で結び $u = hw$ とおくと u は x_0 を始点とする X の道である．b_0 を始点とし，u を覆う B の道 v をとり，v の終点を $b = v(1)$ とおき $\tilde{h}(y) = b$ と定義する．この $\tilde{h}$ の定義が道 w, v のとり方によらないことを証明しなければならない．w, w' を y_0 と y を結ぶ Y の2つの道とするとき，Y が単連結である

から w と w' はホモトープである：$w \sim w'$（補題 141）．したがって $hw \sim hw'$ となるから，b_0 を始点としそれぞれ hw, hw' を被覆する道 v, v' をとると，v, v' の終点は一致する：$v(1) = v'(1)$（補題 147）．よって $\tilde{h}$ が定義できるわけである．(ii) $\tilde{h}: Y \to B$ は連続である．実際，点 $y_1 \in Y$ をとり $h(y_1) = x_1$, $\tilde{h}(y_1) = b_1$ とおく．x_1, b_1 の標準近傍 $U, U(b_1)$ をとると，$p: U(b_1) \to U$ は同相写像であるからその逆写像を $q: U \to U(b_1)$ とする．$V = h^{-1}(U)$ とおくと，Y が局所弧状連結であるから y_1 の近傍 W を $W \subset V$ であり，かつ任意の点 $y \in W$ は y_1 と V の道で結べるようにとれる．さて写像 $g: V \to B$ を $g(y) = qh(y)$ と定義すると g は明らかに連続である．そして W の上では $\tilde{h} = g$ である．実際，y_0 と y_1 を Y の道 w で結びさらに y_1 と y を結ぶ V の道 w' をとる．b_0 を始点とし hw を覆う道を v をとり，また $v' = \tilde{h}w'(= qhw')$ とおくと道 $v \cdot v'$ が定義できて（つぎ目 b_1）かつ $p(v \cdot v') = (hw) \cdot (hw') = h(w \cdot w')$ である．ゆえに $\tilde{h}$ の定義より $\tilde{h}(y) = (v \cdot v')(1) = v'(1)$ である．一方 $g(y) = qh(y) = qhw'(1) = v'(1)$ であるから $\tilde{h} = g$ である．よって $\tilde{h}$ は連続である．(iii) $p\tilde{h} = h$ は $\tilde{h}$ の定義より明らかである．(iv) 最後に $\tilde{h}$ の一意であることを示そう．2つの連続写像 $\tilde{h}, \tilde{h}': (Y, y_0) \to (B, b_0)$ が $p\tilde{h} = h = p\tilde{h}'$ をみたすとする．点 $y \in Y$ を与える．y_0 と y を道 w で結んで $hw = u$ とおく．B の2つの道 $\tilde{h}w = v$, $\tilde{h}'w = v'$ は $pv = u = pv'$ で，かつその始点はともに b_0 であるから $v = v'$ である（補題 146）．特に $\tilde{h}(y) = v(1) = v'(1) = \tilde{h}'(y)$ である．よって $\tilde{h} = \tilde{h}'$ である．



$hw = u = pv$

命題 151.　(B, p, X) を弧状連結被覆空間，(B', p', X') を普遍被覆空間とし，点 $x_0 \in X$, $b_0 \in p^{-1}(x_0)$；$x_0' \in X'$, $b_0' \in p'^{-1}(x_0')$ を与える．このとき任意の連続写像 $h: (X', x_0') \to (X, x_0')$ に対して



$$p\tilde{h} = hp'$$

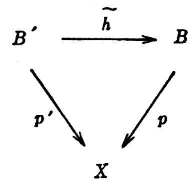
をみたす連続写像 $\tilde{h}: (B', b_0') \to (B, b_0)$ がただ1つ存在する．

証明　補題 150 において (Y, y_0) の代りに (B', b_0'), h の代りに hp' とするとよい．

命題 152. **(被覆定理)** (B, p, X)を弧状連結被覆空間, (B', p', X)を普遍被覆空間とし, 点 $x_0 \in X$, $b_0 \in p^{-1}(x_0)$; $b_0' \in p'^{-1}(x_0)$ を与える. このとき

$$p\tilde{h} = p'$$

をみたす連続写像 $\tilde{h} : (B', b_0') \to (B, b_0)$ がただ1つ存在し, かつ $(B', \tilde{h}, B)$ もまた (普遍) 被覆空間である.



証明　$p\tilde{h} = p'$ をみたす $\tilde{h}$ がただ1つ存在することは命題151において h の代りに恒等写像 $1 : X \to X$ とするとよい. $\tilde{h}$ は全射である. 実際, 点 $b \in B$ に対して b_0 と b を結ぶ道 v をとり $pv = u$ とおく. b_0' を始点とし u を覆う B' の道 v' をとり $v'(1) = b'$ とおくと $\tilde{h}(b') = b$ である. よって $\tilde{h}$ は全射である. つぎに点 x の近傍 V を B, B' に対して同時に被覆空間の (3) の条件をみたしている標準近傍とすると, B において V を同相に被覆する標準近傍 U は写像 $\tilde{h}$ に対しても標準近傍となっている. よって $(B', \tilde{h}, B)$ も被覆空間である.

命題 153. **(1意性定理)** (B, p, X), (B', p', X) を位相空間 X の2つの普遍被覆空間とするとき, (B, p, X) と (B', p', X) は被覆空間として同型である.

証明　点 $x_0 \in X$, $b_0 \in p^{-1}(x_0)$; $b_0' \in p'^{-1}(x_0)$ を与えると

$$(B', b_0') \underset{\tilde{g}}{\overset{\tilde{h}}{\rightleftarrows}} (B, b_0)$$

$p\tilde{h} = p'$, $p'\tilde{g} = p$ をみたす連続写像 $\tilde{h}$, $\tilde{g}$ が1意に存在する (命題152). 写像 $\tilde{g}\tilde{h}$, $1 : (B', b_0') \to (B', b_0')$ を考えると $p'\tilde{g}\tilde{h} = p' = p'1$ となるから1意性より $\tilde{g}\tilde{h} = 1$ を得る (命題152). 同様に $\tilde{h}\tilde{g} = 1$ である. よって $\tilde{h}$ は同相写像であり (B, p, X) と (B', p', X) は被覆空間として同型であることが示された.

(4) 普遍被覆空間の存在

位相空間 X にある条件があれば X の普遍被覆空間が存在することを示そう. 弧状連結な位相多様体ならばその条件をみたしている (例154).

命題 154. **(存在定理)** X を局所弧状連結, 局所単連結な弧状連結空間とすれば, X の普遍被覆空間 (B, p, X) が (被覆空間の同型を除いて) ただ1つ存在する.

証明　点 $x_0 \in X$ をとり固定しておく, x_0 を始点とする X の道全体の集合を $\Omega(X ; x_0, X)$ とする :

$$\Omega(X ; x_0, X) = \{u \mid u : (I, 0) \longrightarrow (X, x_0)\}$$

$\Omega(X ; x_0, X)$ において

$$u \sim u' \iff u(1) = u'(1) \text{ かつ } u \text{ と } u' \text{ はホモトープ}$$

と定義すると関係 ~ は同値法則をみたす（補題 137）. この関係 ~ による $\Omega(X\,;\,x_0,\,X)$ の等化集合を B とし道 u を含む類を $[u]$ で表わす. また写像 $p: B \to X$ を

$$p([u]) = u(1)$$

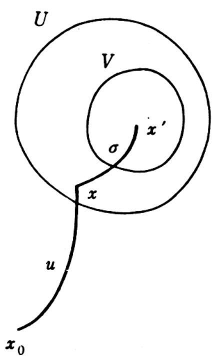
と定義する.

（i） $p: B \to X$ は全射である. 実際, X は弧状連結であるから, x_0 と x を結ぶ道 u をとると $p([u]) = x$ である.

（ii） B に基本近傍系を定義することにより位相を導入しよう. X は局所弧状連結, 局所単連結であるから X の各点の近傍 O に対して $U \subset O$ かつ「U の任意の 2 点を結ぶ道は X の中でホモトープである」ような x の近傍 U がとれる（補題 148）. 以下 X における近傍はすべて「　」のような性質をもつものとする. さて点 $b = [u]$ の基本近傍 $U(b)$ をつぎのように定義する. $u(1) = x$ の近傍 U をとり

$$U' = \{u\cdot\sigma \mid \sigma \text{ は } x \text{ を始点とする } U \text{ の道}\}$$

とし U' の元を含む類全体の集合を $U(b)$ とする. （$U(b)$ の定義は b の代表元 u のとり方によらない）. このようにしてつくられた $U(b)$ 全体が b の基本近傍係の条件 (1)(2)(3)（73 頁）をみたしていることを示そう. (1) $b \in U(b)$ は明らかである. (2) b の 2 つの近傍 $U(b)$, $V(b)$ を与える. $U(b)$, $V(b)$ の定義は $b = [u]$ の代表元 u のとり方によらないので同じ道 u を用いてそれぞれ $x = u(1)$ の近傍 U, V からつくられているとしてよい. このとき x の近傍 W を $W \subset U \cap V$ にとると定義より明らかに $W(b) \subset U(b) \cap V(b)$ がなりたつ. (3) 点 $b' \in U(b)$ を与える. $b' = [u']$ とすると $u' = u\cdot\sigma$（σ は U の道）と表わされている. $u'(1) = x'$ の近傍 V を $V \subset U$ にとり $V(b')$ をつくると $b' \in V(b') \subset U(b)$ である.



（iii） $p: B \to X$ は連続な開写像である. 実際, $p(b) = x$ とし, x の近傍 U を与える. このとき $p(U(b)) = U$ である. それは $p(U(b)) \subset U$ は明らかであるが逆に U は弧状連結であるから U の 2 点 x, x' を U の道 σ で結び道 $u\cdot\sigma$ を考えると $p([u\cdot\sigma]) = x'$ となるから $U \subset p(U(b))$ である. よって $p(U(b)) = U$ となったが, これは p が連続でありかつ開写像であることを示している（補題 45）.

（iv） $p: U(b) \to U$ は同相写像である. 実際, （iii）において $p: U(b) \to U$ が連続開

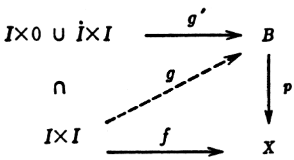
写像であることを証明したから p が単射であることを示すと十分である．さて $b_1, b_2 \in U(b)$に対して $p(b_1) = p(b_2)(= x')$ としよう．$b = [u], b_1 = [u\cdot\sigma_1], b_2 = [u\cdot\sigma_2]$ とする．ここに σ_1, σ_2 は $p(b) = x$ と x' を結ぶ U の道であるから σ_1 と σ_2 はホモトープである：$\sigma_1 \sim \sigma_2$．したがって $u\cdot\sigma_1 \sim u\cdot\sigma_2$ となり $b_1 = [u\cdot\sigma_1] = [u\cdot\sigma_2] = b_2$ である．

（v）　$b, b' \in p^{-1}(x), b \neq b'$ ならば $U(b) \cap U(b') = \phi$ である．実際，$U(b) \cap U(b') \neq \phi$ として点 $c \in U(b) \cap U(b')$ をとる．$b = [u], b' = [u']$ とすると c は $c = [u\cdot\sigma] = [u'\cdot\sigma']$（$\sigma, \sigma'$ は U の道）と表わされるから $u\cdot\sigma \sim u'\cdot\sigma'$ である．しかるに $\sigma \sim \sigma'$ であるから $0 \sim (u\cdot\sigma)\cdot\overline{(u'\cdot\sigma')} = (u\cdot\sigma)\cdot(\bar{\sigma}'\cdot\bar{u}') \sim (u\cdot(\sigma\cdot\bar{\sigma}'))\cdot\bar{u}' \sim u\cdot\bar{u}'$．これより $u \sim u'$，すなわち $b = [u] = [u'] = b'$ となり仮定に反する．

（vi）　$p^{-1}(U) = \bigcup_{b\in p^{-1}(x)} U(b)$ である．実際，$p^{-1}(U) \supset \bigcup_{b\in p^{-1}(x)} U(b)$ は明らかである．逆に点 $b' = [u'] \in p^{-1}(U)$ をとり $p(b') = x'(\in U)$ とおく．x と x' を U の道 σ で結び道 $u = u'\cdot\bar{\sigma}$ をつくる．$b = [u]$ とおくと $p(b) = x$ でありかつ $u' \sim u'\cdot(\bar{\sigma}\cdot\sigma) \sim (u'\cdot\bar{\sigma})\cdot\sigma = u\cdot\sigma$ であるから $b' = [u'] = [u\cdot\sigma] \in U(b)$ である．以上で (B, p, X) は被覆空間であることがわかった．

（vii）　B は弧状連結である．b_0 を 0_{x_0} を含む類とする：$b_0 = [0_{x_0}]$．任意の点 $b \in B$ が b_0 と B の道で結べることを示そう．x_0 と $p(b)$ を結ぶ X の道 u をとり，各 s $(0 \leqq s \leqq 1)$ に対し道 $u_s : I \to X$ を $u_s(t) = u(st)$ と定義する．道 u_s を含む類を $b(s)$ とするとき $v : I \to B, v(s) = b(s)$ は b_0 と b を結ぶ道である．そのためには v が連続写像であることを示さねばならない．点 $b(s_0) \in U(b(s_0))$ をとる．この $U(b(s_0))$ は道 u_{s_0} と $u(s_0)$ の近傍 U からできているとする．$u : I \to X$ は連続であるから正数 $\delta > 0$ を $|s - s_0| < \delta$ ならば $u(s) \in U$ となるようにとる．道 u_s は，道 u_{s_0} に $u(s_0)$ と $u(s)$ を道 u にそって結ぶ道 $\sigma(\sigma \subset U)$ をつないだ道であるから $[u_s] = b(s) \in U(b(s_0))$ となる．以上で $|s - s_0| < \delta$ ならば $b(s) \in U(b(s_0))$ が示されたので v は連続である．

（viii）　B は単連結である：$\pi_1(B, b_0) = 0$. 実際，v を b_0 における閉道とする．$u = pv$ とおき各 $s(0 \leqq s \leqq 1)$ に対して X の道 $u_s : I \to X$ を $u_s(t) = u(st)$ と定義する．B の道 $v' : I \to B$ を $v'(s) = [u_s]$ と定義すると（(vii) 参照）$v'(0) = [u_0] = b_0, pv'(s) = u_s(1) = u(s)$ であるから u を被覆する道の1意性より $v' = v$ である（補題 146）．特に $[u] = v'(1) = v(1) = b_0 = [0_{x_0}]$ である．よって u と 0_{x_0} はホモトープである．$f : I \times I \to X$ を u と 0_{x_0} を結ぶホモトピーとする：$f(t, 0) = u(t), f(t, 1) = f(0, s) = f(1, s) = x_0$. 写像 $g' : I \times 0 \cup \dot{I} \times I \to B$ を



$$\begin{cases} g'(t, 0) = v(t) \\ g'(0, s) = g'(1, s) = b_0 \end{cases}$$

と定義すると g' は連続であり(補題39), $pg' = f|(I \times 0 \cup \dot{I} \times I)$をみたしている. ゆえに被覆ホモトピー性質より g' の拡張であってかつ $pg = f$ をみたす連続写像 $g : I \times I \to B$ が存在する. $g(t, 1)$を考えると $g(0, 1) = b_0$, $pg(t, 1) = f(t, 1) = x_0$ であるから $g(t, 1) = b_0$ である (補題146). さて $g(t, 0) = v(t)$, $g(t, 1) = g(0, s) = g(1, s) = b_0$ であるから g は v と 0_{b_0} を結ぶホモトピーである. よって $\pi_1(B, b_0) = 0$ である. 以上で命題が証明された.

命題154より一般につぎの命題がなりたつ.

命題 X を局所弧状連結, 局所単連結な弧状連結空間とし, 点 $x_0 \in X$ をとり基本群 $\pi_1(X, x_0)$ の部分群 ρ を与える. このとき

$$p_*\pi_1(B, b_0) = \rho$$

をみたす弧状連結な被覆空間 (B, p, X) と点 $b_0 \in p^{-1}(x_0)$ が存在する.

それは $\Omega(X ; x_0, X)$ において

$$u \sim u' \Leftrightarrow \ u(1) = u'(1) \text{ かつ } u \cdot \bar{u}' \text{ を含むホモトピー類が } \rho \text{ に含まれる}$$

と定義し, B を等化集合 $\Omega(X ; x_0, X)/\sim$ とおき, 写像 $p : B \to X$ を $p([u]) \to u(1)$ と定義し, B に適当な位相を導入すると (B, p, X) を求める被覆空間にすることができるのである. 証明は命題154と同じようにするとできる.

(5) 離散群が働く空間

命題155. (B, p, X) を普遍被覆空間とし, π を X の基本群とする : $\pi = \pi_1(X)$. このときつぎの (1), (2) がなりたつ.

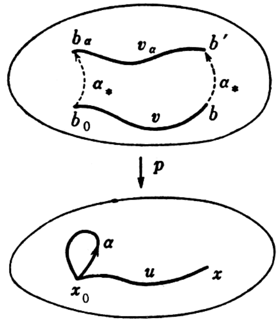
(1) (B, p, X) の各ファイバー $p^{-1}(x)$, $x \in X$ は π と集合として同型である : $p^{-1}(x) \approx \pi$.

(2) 群 π は B に左から自由に働きその軌道空間 B/π は X と位相空間として同型である : $B/\pi \simeq X$.

証明 点 $x_0 \in X$, $b_0 \in p^{-1}(x_0)$ をとり固定しておく. (1) $\pi = \pi_1(X, x_0)$ と $p^{-1}(x_0)$ と比較しよう. 元 $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ を代表する閉道 u をとり, b_0 を始点とし u を覆う B の道 v の終点 b は (u, v のとり方によらず (補題147)) α に対して1意に定まりかつ $pb = x_0$ である. よって写像 $\nu : \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0)$ を $\nu(\alpha) = b$ と定義する. この写像

ν は全単射である．実際，点 $b\in p^{-1}(x_0)$ をとり b_0 と b を B の道 v で結び pv（これは x_0 における X の閉道である）を含む類を α とする．B は単連結であるから b_0 と b を結ぶ 2 つの道 v, v' はホモトープである（補題 141）から α は（b_0 と b を結ぶ道 v のとり方によらず）b に対して 1 意に定まる，そして写像 $\nu' : p^{-1}(x_0)\to\pi$ は ν の逆写像である．

（2） $\alpha\in\pi_1(X, x_0)$ に対して $\nu(\alpha)=b_\alpha\in p^{-1}(x_0)$ とおく．このとき $p\alpha_*=p$ をみたす連続写像 $\alpha_* : (B, b_0)\to(B, b_\alpha)$ がただ 1 つ存在する（命題 152）．この写像 α_* の定義はつぎのようであった．$b\in B$ に対し b_0 と b を道 v で結び b_α を始点とし pv を覆う道 v_α の終点を b' とするとき $\alpha_*(b)=b'$ と定義した．このとき $\alpha, \beta\in\pi_1(X, x_0)$ に対して $(\alpha\beta)_*=\alpha_*\beta_*$ がなりたつ．実際，B の道 v_1, v_2, v_3 を $v_1(0)=b_0$, $v_1(1)=b_\alpha$, $[pv_1]=\alpha$; $v_2(0)=b_0$, $v_2(1)=b_\beta$, $[pv_2]=\beta$; $v_3(0)=b_\alpha$, $[pv_3]=\beta$ にとると $v_3(1)=\alpha_*(b_\beta)=\alpha_*(\beta_*(b_0))$ である．一方 B の道 $v_1\cdot v_3$ を考えると $[p(v_1\cdot v_3)]=[(pv_1)\cdot(pv_3)]=\alpha\beta$ でありかつ $(v_1\cdot v_3)(1)=v_3(1)$ であるから $(\alpha\beta)_*(b_0)=\alpha_*(\beta_*(b_0))$ である．ゆえに 1 意性（命題 152）より $(\alpha\beta)_*=\alpha_*\beta_*$ を得る．さて写像 $\mu : \pi_1(X, x_0)\times B\to B$ を

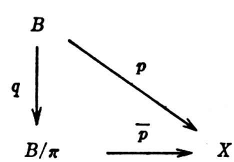


$$\mu(\alpha, b)=\alpha_*(b)$$

と定義すると $\pi_1(X, x_0)$ は B に左から働く，自由に働くことは，$\alpha_*(b_0)=b_0$ ならば 1 意性定理（命題 152）より $\alpha_*=1$ となるからである．B の 2 点 b, b' に対して $\alpha_*(b)=b'$ となる $\alpha\in\pi_1(X, x_0)$ が存在するとき $p(b)=p(b')$ であることは明らかである．逆に $p(b)=p(b')$ のとき，すなわち b, b' が同じファイバーに属するとき b を b' に移す $\alpha\in\pi_1(X, x_0)$ が存在することも容易にわかる．よって

$$b\sim b'\ (\text{同じ軌道上にある})\iff p(b)=p(b')$$

がなりたつ．ゆえに p は $\bar{p}q=p$（ここに $q : B\to B/\pi_1(X, x_0)$ は射影とする）をみたす全単射 $\bar{p} : B/\pi_1(X, x_0)\to X$ を誘導する（補題 2）．しかるに p, q が連続な開写像であるから $\bar{p}$ は同相写像である．よって $B/\pi_1(X, x_0)$ と X は同相である．



つぎの命題は命題 155 の逆の命題である．

命題 156. 離散群 π が位相空間 B に左から働いていると

し，B の各点 b に，すべての $\alpha \in \pi$ $(\alpha \neq 1)$ に対して

$$U(b) \cap \alpha U(b) = \phi$$

をみたす b の近傍 $U(b)$ が存在するとする．このときつぎの (1), (2) がなりたつ．

（1） $(B, p, B/\pi)$ ($p: B \to B/\pi$ は射影とする) は被覆空間である．

（2） B が単連結ならば基本群 $\pi_1(B/\pi)$ と π は群として同型であり，かつ $\pi_1(B/\pi)$ の B への働き方（命題155）と π の B への働き方が一致するように同型対応 $\pi_1(B/\pi) \to \pi$ をつくることができる：$\pi_1(B/\pi) \cong \pi$

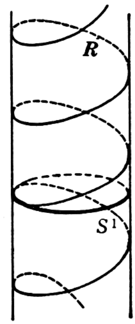
証　明　（1） 射影 $p: B \to B/\pi$ は連続な全射開写像である（補題88）．条件の近傍 $U(b)$ をとり $p(U(b)) = U$ とおくと p が開写像であるから U は B/π の開集合である．$p: U(b) \to U$ は単射である．実際 $b', b'' \in U(b)$ に対して $p(b') = p(b'')$ とすると $\alpha b' = b''$ となる $\alpha \in \pi$ が存在するが $U(b)$ の性質より $\alpha = 1$ である．よって $b' = b''$ となる．したがって $p: U(b) \to U$ は同相写像である．また $\alpha U(b)$ は点 αb の近傍であって p は同相写像 $p: \alpha U(b) \to U$ を誘導していることを注意しておく．さて $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \pi} \alpha U(b)$ であり $\alpha \neq \beta$ のとき $\alpha U(b) \cap \beta U(b) = \phi$ であることも $U(b)$ の条件 $U(b) \cap \alpha^{-1}\beta U(b) = \phi$ より明らかであるから U；$\alpha U(b), \beta U(b), \cdots$ は被覆空間の標準近傍の条件をみたしている．よって $(B, p, B/\pi)$ は被覆空間である．

（2） $X = B/\pi$ とおき，点 $x_0 \in X$, $b_0 \in p^{-1}(x_0)$ を与える．以下の証明は命題155の証明と同じであるが再記しよう．写像 $f: \pi_1(X, x_0) \to \pi$ をつぎのように定義する．$\alpha' \in \pi_1(X, x_0)$ を代表する閉道 u をとり b_0 を始点とし u を覆う道 v の終点は u, v のとり方によらず α' に対して1意に定まる（補題147）．$v(1)$ は $p^{-1}(x_0)$ の元であるから $v(1) = \alpha b_0$ となる $\alpha \in \pi$ がただ1つ存在するので $f(\alpha') = \alpha$ と定義する．f は全単射である．実際，$\alpha \in \pi$ に対して b_0 と αb_0 を結ぶ道 v をとり pv (pv は x_0 における閉道である) を含む類を α' とすると B は単連結であるから α' は v とり方によらず1意に定まる．そして写像 $g: \pi \to \pi_1(X, x_0)$, $g(\alpha) = \alpha'$ は f の逆写像である．つぎに f は準同型写像である．実際，$\alpha', \beta' \in \pi_1(X, x_0)$ に対して $f(\alpha') = \alpha$, $f(\beta') = \beta$ とする．B の道 v_1, v_2 をそれぞれ $v_1(0) = b_0$, $v_1(1) = \alpha b_0$, $[pv_1] = \alpha'$；$v_2(0) = b_0$, $v_2(1) = \beta b_0$, $[pv_2] = \beta'$ をみたすようにとる．B の道 $v_1 \cdot (\alpha v_2)$ を考えると $[p(v_1 \cdot \alpha v_2)] = [pv_1 \cdot p(\alpha v_2)] = [pv_1 \cdot pv_2] = \alpha'\beta'$ で $(v_1 \cdot (\alpha v_2))(1) = \alpha v_2(1) = \alpha\beta b_0$ であるから $f(\alpha'\beta') = \alpha\beta = f(\alpha')f(\beta')$ となる．よって $f: \pi_1(X, x_0) \to \pi$ は群の同型写像である．なおこの f により群 $\pi_1(X, x_0)$ と π を同一視するとき，両者の B への働き方が一致していることも明らかであろう．

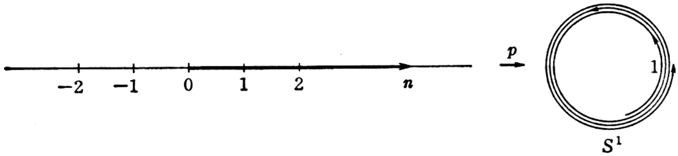
定理 54. $(\boldsymbol{R}, p, S^1)$ $(p: \boldsymbol{R} \to S^1, p(x) = e^{2\pi i x})$ は S^1 の普遍被覆空間である．かつ S^1 の基本群は $\boldsymbol{Z}$ と群として同型である：

$$\pi_1(S^1) \cong \boldsymbol{Z}$$

証明 写像 $\mu: \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $\mu(n, x) = n + x$ により加群 $\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{R}$ に（左から）働いている．$\boldsymbol{R}$ の各点 x に対して x を含む開区間 $U(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}, x + \dfrac{1}{2}\right)$ をとると，この $U(x)$ は命題156の条件をみたしているので $(\boldsymbol{R}, p, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ は被覆空間である．さらに $\boldsymbol{R}$ は単連結である（例153）から，$\boldsymbol{R}$ は S^1 の普遍被覆空間でありかつ $\pi_1(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}$ である（命題156(2)）．$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ は S^1 と同相であるから定理を得る．



例 155. 定理54で $\pi_1(S^1) \cong \boldsymbol{Z}$ を証明したが，この同型対応はつぎのように与えられている（命題156(2)の証明参照）．$n \in \boldsymbol{Z}$ に対応する $\pi_1(S^1)$ の元は0と n を結ぶ $\boldsymbol{R}$ の道を円 S^1 に n 回まきつけてできる閉道を含む類であり，一方，$-n \in Z$ に対応する $\pi_1(S^1)$ の元は前とは逆の方向に S^1 に n 回まきついた閉道を含む類である．



射影空間の基本群を求めるためには，つぎの定理が必要となるが厳密な証明なしに用いることにする．

定理[†] 55. 球面 S^n $(n \geqq 2)$ は単連結である：

$$\pi_1(S^n) = 0$$

略証 点 $x_0 \in S^n$ における閉道 u に対して，u にホモトープであり，かつ S^n のある1点 p を通らない x_0 における閉道 v をとることができる（このことは自明でないのでこれを示すためには**単体近似定理**を用いるのが普通である）．$S^n - \{p\}$ は E^n $(\simeq \boldsymbol{R}^n)$ に同相である（定理27）から単連結である（例153）．したがって v は 0_{x_0} にホモトープで

---

† $P_1 = \{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in S^n | x_{n+1} \geqq 0\}$, $P_2 = \{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in S^n | x_{n+1} \leqq 0\}$ としてつぎの **van Kampen の定理**を用いてもよい．「P_1, P_2 を単体復体 S の空でない部分復体とし $P_0 = P_1 \cap P_2$, $S = P_1 \cup P_2$ と仮定する．このとき P_1, P_2 が単連結でありかつ P_0 が連結であれば S は単連結である」．

ある．よって $u \sim 0_{x_0}$ となり S^n が単連結であることがわかる．

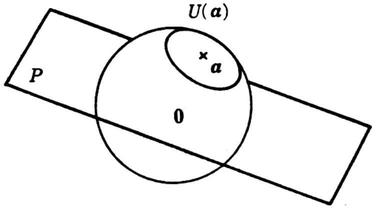
定理 56.　写像 $p: S^n \to \boldsymbol{RP}_n$ を $p(\boldsymbol{a}) = [\boldsymbol{a}]$ とする．

（1）　$n \geqq 1$ に対して $(S^n, p, \boldsymbol{RP}_n)$ は実射影空間 $\boldsymbol{RP}_n$ の被覆空間である．

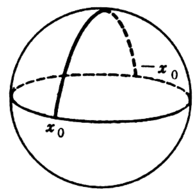
（2）　$n \geqq 2$ のとき $(S^n, p, \boldsymbol{RP}_n)$ は実射影空間 $\boldsymbol{RP}_n$ の普遍被覆空間であり，$\boldsymbol{RP}_n$ の基本群は $\boldsymbol{Z}_2$ と群として同型である：

$$\pi_1(\boldsymbol{RP}_n) \cong \boldsymbol{Z}_2$$

証明　写像 $\mu: S^0 \times S^n \to S^n$, $\mu(a, \boldsymbol{a}) = a\boldsymbol{a}$ により S^0 は S^n に（左から）働いている（定理 19）．S^n の各点 $\boldsymbol{a}$ に対して，命題 156 の条件をみたす近傍 $U(\boldsymbol{a})$ が存在する．実際，$\boldsymbol{a}$ に垂直な超平面 P を考え，P と交わらない（十分小さい）$\boldsymbol{a}$ の近傍 $U(\boldsymbol{a})$ をとるとよい．したがって $(S^n, p, S^n/S^0 \simeq \boldsymbol{RP}_n)$ は被覆空間である（命題 156 (1)）．$n \geqq 2$ のとき S^n は単連結である（定理 55）から S^n は $\boldsymbol{RP}_n$ の普遍被覆空間であり，かつ $\pi_1(\boldsymbol{RP}_n) \cong S^0$ である（命題 156 (2)）．基本群が可換群であるときには加群で表わす約束であるから $\pi_1(\boldsymbol{RP}_n) \cong \boldsymbol{Z}_2$ と表わすわけである．



例 156.　$\pi_1(\boldsymbol{RP}_n, [\boldsymbol{x}_0]) \cong \boldsymbol{Z}_2$ $(n \geqq 2)$ の 0 でない元は S^n の 2 点 $\boldsymbol{x}_0$, $-\boldsymbol{x}_0$ を大円にそって結ぶ道 u（この道 u は $S^n/S^0 = \boldsymbol{RP}_n$ で考えると閉道である）を含む類である．



S^n

§5．被覆群

位相群 G の被覆空間 B には G から導かれる積が定義されて，B が再び位相群になることを示そう．そして普遍被覆群の考え方が特に重要であり，位相群（特に Lie 群）を分類するのに基本的な役割を果している．

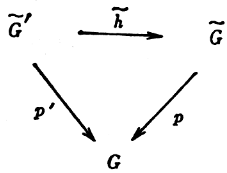
定義　$(\tilde{G}, p, G)$ がつぎの 3 つの条件

（1）　$\tilde{G}$, G は位相群である．

（2）　$(\tilde{G}, p, G)$ は被覆空間である．

（3）　$p: \tilde{G} \to G$ は（連続な全射）準同型写像である．

をみたすとき，$(\tilde{G}, p, G)$ を（または単に $\tilde{G}$ を）G の**被覆群**という．さらに $\tilde{G}$ が局所



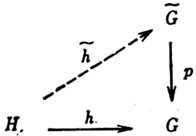
弧状連結かつ単連結であるとき $(\tilde{G}, p, G)$ を（または単に $\tilde{G}$ を）G の**普遍被覆群**という．

定義　位相群 G の2つの被覆群 $(\tilde{G}, p, G)$, $(\tilde{G}', p', G)$ に対して

$$p\tilde{h} = p'$$

をみたす位相群の同型写像 $\tilde{h}: \tilde{G}' \to \tilde{G}$ が存在するとき，$(\tilde{G}, p, G)$ と $(\tilde{G}', p', G)$ は**被覆群として同型**であるという．

補題 157.　$(\tilde{G}, p, G)$ を弧状連結被覆群とし，H を局所弧状連結な単連結群とする．このとき任意の連続な準同型写像 $h: H \to G$ に対して

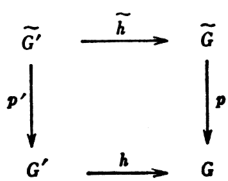


$$p\tilde{h} = h$$

をみたす連続な準同型写像 $\tilde{h}: H \to \tilde{G}$ がただ1つ存在する．

証明　H, G の単位元を共に e で表わすことにし，補題 150 で定義した連続写像 $\tilde{h}: (H, e) \to (\tilde{G}, e)$ が群の準同型写像であることを示そう．$y, y' \in H$ に対して $\tilde{h}(y) = \tilde{x}$, $\tilde{h}(y') = \tilde{x}'$ とする．写像 $\tilde{h}$ の定義より，H の単位元 e と y, y' を結ぶ道をそれぞれ w, w' とし，$\tilde{G}$ の単位元 e を始点とし hw, hw' を覆う $\tilde{G}$ の道を v, v' とするとき $v(1) = \tilde{x}$, $v'(1) = \tilde{x}'$ であった．このとき ww' は e と yy' を結ぶ H の道であり，かつ vv' は $p(vv') = p(v)p(v') = h(w)h(w') = h(ww')$ をみたすから，$h(ww')$ を覆う $\tilde{G}$ の道である．よって $\tilde{h}(yy') = (vv')(1) = v(1)v'(1) = \tilde{h}(y)\tilde{h}(y')$ である．すなわち $\tilde{h}$ は準同型写像である．

命題 158.　$(\tilde{G}, p, G)$ を弧状連結被覆群とし，$(\tilde{G}', p', G')$ を普遍被覆群とする．このとき任意の連続な準同型写像 $h: G' \to G$ に対して

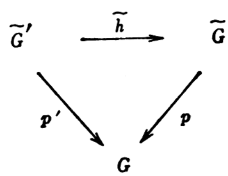


$$p\tilde{h} = hp'$$

をみたす連続な準同型写像 $\tilde{h}: \tilde{G}' \to \tilde{G}$ がただ1つ存在する．

証明　補題 157 において H の代わりに $\tilde{G}'$, h の代りに hp' とするとよい．

命題 152, 153 と命題 158 よりつぎの命題 159, 160 を得る．



命題 159.　**(被覆定理)**　$(\tilde{G}, p, G)$ を弧状連結被覆群とし $(\tilde{G}', p', G)$ を普遍被覆群とする．このとき

$$p\tilde{h} = p'$$

をみたす連続な準同型写像 $\tilde{h}: \tilde{G}' \to \tilde{G}$ がただ1つ存在し，か

つ $(\tilde{G}', \tilde{h}, \tilde{G})$ もまた（普遍）被覆群である.

命題 160. **（1 意性定理）** $(\tilde{G}, p, G)$, $(\tilde{G}', p', G)$ を位相群 G の 2 つの普遍被覆群とするとき，$(\tilde{G}, p, G)$ と $(\tilde{G}', p', G)$ は被覆群として同型である.

命題 161. **（存在定理）** G を局所弧状連結，局所単連結な弧状連結群とすれば，G の普遍被覆群 $(\tilde{G}, p, G)$ が（被覆群の同型を除いてただ 1 つ）存在する.

証明 空間 G の普遍被覆空間 $\tilde{G}$ の命題 154 におけるつくり方は，$\Omega(G\,;e, G)$ をホモトープの関係 $\sim$ で類別した空間であった. $\tilde{G}$ において積をつぎのように定義する：

$$[u][v] = [uv]$$

この積が代表元 u, v のとり方によらないこと，および $\tilde{G}$ が群であることを補題 144 (1), (2) が示している. $\tilde{G}$ は位相群である. 実際，点 $[u][v]$ の近傍 $U([u][v])$ が与えられたとする. 近傍 $U([u][v])$ は道 uv と $(uv)(1) = u(1)v(1)$ の近傍 U からつくられているものとする. $u(1)$ の近傍 V と $v(1)$ の近傍 W を $VW \subset U$ をみたすようにとり，$[u]$, $[v]$ の近傍をそれぞれ $V([u])$, $W([v])$ をつくると $V([u])W([v]) \subset U([u][v])$ となる（記号は命題 154 の証明の記号と同じとする). ゆえに群 $\tilde{G}$ における積は連続である. つぎに点 $[u^{-1}] = [u]^{-1}$ の近傍 $U([u]^{-1})$ が与えられたとし，$U([u]^{-1})$ は道 u^{-1} と $u(1)^{-1}$ の近傍 U からつくられているものとする. $u(1)$ の近傍 V を $V^{-1} \subset U$ をみたすようにとり，道 u と V とを用いて $[u]$ の近傍 $V([u])$ をつくると $(V([u]))^{-1} \subset U([u]^{-1})$ となる. よって $\tilde{G}$ は位相群である. また $p : \tilde{G} \to G$ は準同型写像である. 実際，$p([u][v]) = p([uv]) = (uv)(1) = u(1)v(1) = p([u])p([v])$ である. よって命題が証明された.

命題 162. G を位相群，N を G の離散正規部分群とし，$p : G \to G/N$ を自然な準同型写像とする. このとき $(G, p, G/N)$ は被覆群である.

証明 N は離散であるから $V \cap N = \{e\}$（e は G の単位元）をみたす e の近傍 V が存在する. e の近傍 U を $UU^{-1} \subset V$ をみたすようにとると $UU^{-1} \cap N \subset V \cap N = \{e\}$ である. したがってすべての元 $a \in N$ $(a \neq e)$ に対して $U \cap aU = \phi$ がなりたつ. ゆえに G の各点 x に対して，x の近傍 Ux をとると

$$Ux \cap aUx = \phi \qquad (a \in N,\ a \neq e)$$

をみたしている. したがって $(G, p, G/N)$ は被覆空間である（命題 156 (1)). さらに $p : G \to G/N$ は連続な全射準同型写像であるから $(G, p, G/N)$ は被覆群である.

つぎの命題は命題 162 の逆である，

命題 163. $(\tilde{G}, p, G)$ を被覆群とする. このとき p の核 N は $\tilde{G}$ の離散正規部分群で

あり，$\tilde{G}/N$ と G は位相群として同型である：

$$\tilde{G}/N \cong G$$

さらに $\tilde{G}$ が G の普遍被覆群であるとき，G の基本群は N に群として同型である：

$$\pi_1(G) \cong N$$

証明 射影 $p:\tilde{G} \to G$ は連続な全射準同型開写像であるから，p は位相群としての同型 $\tilde{G}/N \cong G$ を誘導する（命題80，なお命題155 (2) 参照）．N は G の単位元 e の上のファイバーであるから離散（正規部分群）である（補題149の証明の初めの部分参照）．N の元は $\tilde{G}$ のすべての元と可換である（命題73）ことに注意すると，N が右から働くことと左から働くこととは同じであるから，命題156 (2) より $\pi_1(G) \cong \pi_1(\tilde{G}/N) \cong N$ を得る．

例 157. $(\boldsymbol{R}, p, S^1)$ $(p:\boldsymbol{R} \to S^1,\ p(x) = e^{2\pi ix})$ は普遍被覆群である．S^1 は弧状連結な多様体でありかつ位相群であるから，S^1 の普遍被覆群が同型を除いてただ1つ存在する（命題161）が，それが位相群 $\boldsymbol{R}$ にほかならないのである．

弧状連結な Lie 群 G に対しては，つねにその普遍被覆群 $\tilde{G}$（このとき $\tilde{G}$ もまた Lie 群になる）が存在する（命題161）ことは重要なことである．そして命題163は任意の弧状連結な Lie 群は単連結 Lie 群 $\tilde{G}$ の離散正規部分群による剰余群として得られることを示している．すなわち弧状連結 Lie 群を分類するには，単連結 Lie 群 $\tilde{G}$ を分類しかつその離散正規部分群をすべて調べあげるとよいわけである．この方法を用いて，コンパクト単純 Lie 群（Lie 群 G が**単純**であることは離散でない正規部分群をもたないこと）がすべて分類されている．$SU(n)$, $SO(n)$ $(n \neq 4)$, $Sp(n)$ はその重要な例であり，これらは古典的なコンパクト単純 Lie 群と呼ばれている．この他にも G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 とかかれ，例外的なコンパクト単純 Lie 群と呼ばれる重要なコンパクト単純 Lie 群が存在する．これらの群の多様体としての次元はつぎの通りである（前半は定理44）．

群	$SU(n)$,	$SO(n)$,	$Sp(n)$,	G_2,	F_4,	E_6,	E_7,	E_8
次元	n^2-1	$\dfrac{n(n-1)}{2}$	$n(2n+1)$	14	52	78	133	248

なお G_2, F_4 については付録 (4) で少し触れておいた．

§6. ホモトピー群

基本群を拡張して n 次元ホモトピー群を定義しよう．射影空間および古典群の基本群を求めるのが本章の目的であるが，そのために基本群とホモトピー群との関係を調べておくことにする．本書では2次元ホモトピー群以外は計算に際して用いないが，2次元ホモト

ピー群も一般次元ホモトピー群も定義するだけならば同じ手数であるから一般に述べておこう．そしてホモトピー完全系列を証明するのをこの節の主な目的とする．記号 I, I^n, I^{n-1}, $\dot{I}^n$, J^{n-1} は§2と同じである．

(1) ホモトピー群

X を位相空間とし，点 $x_0 \in X$ をとり固定しておく．連続写像 $u:(I^n, \dot{I}^n) \to (X, x_0)$ 全体の集合を $\mathfrak{F}_n(X, x_0)$ で表わす．$\mathfrak{F}_n(X, x_0)$ の2つの元 u, v に対して

$$\begin{cases} F(t_1, \cdots, t_n, 0) = u(t_1, \cdots, t_n) \\ F(t_1, \cdots, t_n, 1) = v(t_1, \cdots, t_n) \end{cases}$$

をみたす連続写像 $F:(I^n \times I, \dot{I}^n \times I) \to (X, x_0)$ が存在するとき u と v は**ホモトープ**であるといい，$u \sim v$ または $u \sim v\,(F)$ で表わす．F を u と v を結ぶ**ホモトピー**という．

補題 164. X を位相空間とする．$\mathfrak{F}_n(X, x_0)$ において

$$u \sim v \iff u \text{ と } v \text{ はホモトープである}$$

と定義すると関係 $\sim$ は同値法則をみたす．

証明 補題137と全く同様にするとよい．

$n \geqq 1$ のとき $\mathfrak{F}_n(X, x_0)$ の元 u, v に対して，$u+v \in \mathfrak{F}_n(X, x_0)$, $-u \in \mathfrak{F}_n(X, x_0)$ を

$$(u+v)(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} u(2t_1, t_2, \cdots, t_n) & 0 \leqq t_1 \leqq 1/2 \\ v(2t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n) & 1/2 \leqq t_1 \leqq 1 \end{cases}$$

$$(-u)(t_1, \cdots, t_n) = u(1-t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

と定義する．また元 $0_{x_0} \in \mathfrak{F}_n(X, x_0)$ を

$$0_{x_0}(t_1, \cdots, t_n) = x_0$$

と定義する．この 0_{x_0} は単に0で表わすことが多い．このとき補題139と同様につぎの補題がなりたつ．

補題 165. X を位相空間とし，$x_0 \in X$ とする．$\mathfrak{F}_n(X, x_0)$ $(n \geqq 1)$ において

(1) $u \sim v,\ u' \sim v'$ ならば $u + u' \sim v + v'$

(2) $u \sim v$ ならば $-u \sim -v$

(3) $(u+v)+w \sim u+(v+w)$

(4) $u + 0 \sim u,\quad 0 + u \sim u$

(5) $u + (-u) \sim 0,\quad (-u) + u \sim 0$

がなりたつ．

$\mathfrak{F}_n(X, x_0)$ $(n \geqq 1)$ のホモトピー関係~による等化集合 $\mathfrak{F}_n(X, x_0)/\sim$ を $\pi_n(X, x_0)$ で表わし，かつ $u \in \mathfrak{F}_n(X, x_0)$ を含む類を $[u]$ で表わす．$\pi_n(X, x_0)$ の2つの元 $[u], [v]$ の和を

$$[u] + [v] = [u + v]$$

と定義する．補題165はこの和が代表元 u, v のとり方によらず定義され，かつ $\pi_n(X, x_0)$ がこの和に関して群をつくることを示している．実際，群 $\pi_n(X, x_0)$ の単位元は $[0]$ であり $[u]$ の逆元は $[-u]$ である．このようにして得られた群 $\pi_n(X, x_0)$ を位相空間 X の **x_0 を基点とする n 次元ホモトピー群**という．1次元ホモトピー群 $\pi_1(X, x_0)$ は基本群にほかならない．ただし $\pi_1(X, x_0)$ は可換群であるとは限らないが，ここでは群の算法が和の記号でかかれていることに注意しよう．また X が弧状連結であるとき，X の2点 x_0, x_1 をそれぞれ基点とするホモトピー群 $\pi_n(X, x_0), \pi_n(X, x_1)$ が群として同型である：

$$\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_1)$$

ことがわかる（その証明は基本群のときの拡張をするとよいが基本群のときより少し面倒であるかも知れない．本書では省略する）．したがってこの群は基点 x のとり方に関係せず X のみで定まる群と考えて，$\pi_n(X)$ で表わし X の **n 次元ホモトピー群**という．

$n \geqq 2$ のとき $\pi_n(X, x_0)$ は可換群であることを示そう（このことをみこして，$\pi_n(X, x_0)$ の算法を加法で表わしたのである）．$\mathfrak{F}_n(X, x_0)$ において今1つの和 $u \underset{2}{+} v$, $\underset{2}{-}u$ を

$$(u \underset{2}{+} v)(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} u(t_1, 2t_2, t_3, \cdots, t_n) & 1 \leqq t_2 \leqq 1/2 \\ v(t_1, 2t_2 - 1, t_3, \cdots, t_n) & 1/2 \leqq t_2 \leqq 1 \end{cases}$$

$$(\underset{2}{-}u)(t_1, \cdots, t_n) = u(t_1, 1 - t_2, t_3, \cdots, t_n)$$

と定義する．

補題 166. $u, u', v, v' \in \mathfrak{F}_n(X, x_0)$ $(n \geqq 2)$ に対して

（1） $(u \underset{2}{+} v) + (u' \underset{2}{+} v') = (u + u') \underset{2}{+} (v + v')$

（2） $u \underset{2}{+} v \sim u + v$

がなりたつ．

証明 (1) は定義より明らかである（和を定義する場所がずれている）．(2) 和 $\underset{2}{+}$ に関しても補題165と同じことがなりたつことがわかる．特に $u \underset{2}{+} 0 \sim u \sim 0 \underset{2}{+} u$ がなりたつ．さて $u + v \sim (u \underset{2}{+} 0) + (0 \underset{2}{+} v) = (u + 0) \underset{2}{+} (0 + v) \sim u \underset{2}{+} v$ である．

命題 167. X を位相空間とし，点 $x_0 \in X$ を与える．$n \geqq 2$ のとき $\pi_n(X, x_0)$ は可換

群である.

証明　$u, v \in \mathfrak{F}_n(X, x_0)$ に対して, $u+v \sim u \underset{2}{+} v \sim (0+u) \underset{2}{+} (v+0) = (0 \underset{2}{+} v) + (u \underset{2}{+} 0) \sim v+u$ (補題166) がなりたつ. よって $[u]+[v]=[v]+[u]$ である.

(2)　弧状連結成分

X を位相空間とし, 点 $x_0 \in X$ を与える. 0次元ホモトピー集合 $\pi_0(X, x_0)$ について調べてみよう. $I^0=\{0\}$, $\dot{I}^0=\phi$ であるから, $\mathfrak{F}_0(X, x_0)$ の元 $u:(I^0, \dot{I}_0)=(0, \phi)\to(X, x_0)$ と X の点 $u(0)=x$ を同一視すると, $\mathfrak{F}_0(X, x_0)$ は集合 X のことにほかならない. $\mathfrak{F}_0(X, x_0)$ は x_0 のとり方には関係しないので $\mathfrak{F}_0(X)$ とかく方がよいかも知れない. X と $\mathfrak{F}_0(X)$ を同一視するとき, 2点 $x, x' \in X$ がホモトープであるということは x と x' が X の道で結べるということにほかならない. したがって $X=\mathfrak{F}_0(X)$ をホモトープの関係で類別した集合 $\pi_0(X)$ は X の弧状連結成分の集合のことである. $\pi_0(X)$ においては和が定義されていないので, $\pi_0(X)$ は群ではなく単なる集合にすぎないことに注意しておこう. $\pi_0(X)$ がただ1つの元からなるとき $\pi_0(X)=0$ とかく. $\pi_0(X)=0$ は X が弧状連結であることと同じである. またわれわれは集合 M に対して M の特定の点を指定して考えることが多い. 以下 $\pi_0(X, x_0)$ と表わすときには X の弧状連結成分の集合 $\pi_0(X)$ において x_0 を含む弧状連結成分を指定したものとする.

(3)　相対ホモトピー群

X を位相空間とし, A は X の空でない部分空間とし, 点 $x_0 \in A$ を与える：$x_0 \in A \subset X$. $n \geqq 1$ とし連続写像 $u:(I^n, \dot{I}^n, J^{n-1})\to(X, A, x_0)$ 全体の集合を $\mathfrak{F}_n(X, A, x_0)$ で表わす. $\mathfrak{F}_n(X, A, x_0)$ の2つの元 u, v に対して

$$\begin{cases} F(t_1, \cdots, t_n, 0) = u(t_1, \cdots, t_n) \\ F(t_1, \cdots, t_n, 1) = v(t_1, \cdots, t_n) \end{cases}$$

をみたす連続写像 $F:(I^n\times I, \dot{I}^n\times I, J^{n-1}\times I)\to(X, A, x_0)$ が存在するとき, u と v は**ホモトープ**であるといい, $u\sim v$ または $u\sim v\,(F)$ で表わす. F を u と v を結ぶ**ホモトピー**という. $\mathfrak{F}_n(X, A, x_0)$ において

$$u\sim v \iff u \text{ と } v \text{ はホモトープである}$$

と定義すると関係 $\sim$ が同値法則をみたすことは補題137, 164と同様である. また $n\geqq 2$ のとき $\mathfrak{F}_n(X, A, x_0)$ の元 u, v に対して $u+v\in\mathfrak{F}_n(X, A, x_0)$, $-u\in\mathfrak{F}_n(X, A, x_0)$ を

$$(u+v)(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} u(2t_1, t_2, \cdots, t_n) & 0\leqq t_1\leqq 1/2 \\ v(2t_1-1, t_2, \cdots, t_n) & 1/2\leqq t_1\leqq 1 \end{cases}$$

$$(-u)(t_1, \cdots, t_n) = u(1-t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

と定義する. $n=1$ のときには和 $u+v$ が一般には定義されないことを注意しておこう. なお元 $0=0_{x_0} \in \mathfrak{F}_n(X, A, x_0)$ を $0_{x_0}(t_1, \cdots, t_n)=x_0$ で定義しておく. このとき $\mathfrak{F}_n(X, A, x_0)$ $(n \geqq 2)$ において補題165と同じことがなりたつ.

さて $\mathfrak{F}_n(X, A, x_0)$ $(n \geqq 1)$ のホモトピー関係 $\sim$ による等化集合 $\mathfrak{F}_n(X, A, x_0)/\sim$ を $\pi_n(X, A, x_0)$ で表わし, かつ $u \in \mathfrak{F}_n(X, A, x_0)$ を含む類を $[u]$ で表わす. $\pi_n(X, A, x_0)$ $(n \geqq 2)$ の2つの元 $[u]$, $[v]$ の和を $[u]+[v]=[u+v]$ と定義すると $\pi_n(X, A, x_0)$ は群になる. このようにして得られた群 $\pi_n(X, A, x_0)$ を **n 次元相対ホモトピー群**という ($\pi_1(X, A, x_0)$ は単なる集合にすぎない). $A=x_0$ のときには $\pi_n(X, A, x_0)$ はホモトピー群 $\pi_n(X, x_0)$ にほかならない.

命題 168. X を位相空間とし, その部分空間 A と点 $x_0 \in A$ を与える. $n \geqq 3$ のとき $\pi_n(X, A, x_0)$ は可換群である.

証明 $\mathfrak{F}_n(X, x_0)$ のときと同様に, $\mathfrak{F}_n(X, A, x_0)$ $(n \geqq 3)$ においても和 $u \underset{2}{+} v$, $\underset{2}{-}u$ が定義されて ($n=2$ のときには和 $\underset{2}{+}$ が定義されなくて条件 $n \geqq 3$ が必要であることに注意しよう), 補題166と同じ事実がなりたつので命題167と全く同様にすると証明できる.

つぎの補題は命題171の証明に用いる.

命題 169. $\alpha \in \pi_n(X, A, x_0)$ $(n \geqq 1)$ の代表元 $u:(I^n, \dot{I}^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ を $u(I^n) \subset A$ をみたすようにとれるならば $\alpha=0$ である.

証明 u に対して写像 $F: I^n \times I \to X$ を

$$F(t_1, \cdots, t_n, s) = u(t_1, \cdots, t_{n-1}, s+t_n-st_n)$$

と定義すると, F は連続写像 $F:(I^n \times I, \dot{I}^n \times I, J^{n-1} \times I) \to (A, A, x_0) \subset (X, A, x_0)$ であって, かつ

$$\begin{cases} F(t_1, \cdots, t_n, 0) = u(t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n) \\ F(t_1, \cdots, t_n, 1) = u(t_1, \cdots, t_{n-1}, 1) = x_0 \end{cases}$$

をみたしている. ゆえに $\mathfrak{F}_n(X, A, x_0)$ において u と 0 はホモトープである : $u \sim 0\,(F)$. したがって $\alpha=0$ である.

(4) 完全系列

A, B を加群とし, $f: A \to B$ を加群の準同型写像とする. A の f による像 $f(A)$ は B の部分群であるがこの $f(A)$ を $\operatorname{Im} f$ とかく. また f の核 $f^{-1}(0)$ は A の部分群であるがこの $f^{-1}(0)$ を $\operatorname{Ker} f$ とかく.

定義　A_n を加群とし，$f_n: A_n \to A_{n-1}$ を加群の準同型写像とする．系列

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

が**完全**であるとは，各 n に対して

$$\operatorname{Im} f_{n+1} = \operatorname{Ker} f_n$$

がなりたつことである．

注意　完全系列は A_n が加群である必要はなく，群であっても同様に定義される．もっと一般に，各 A_n が集合であり，そして各 A_n が0と名付ける特定の元を含んでいるとする．このときにも写像 $f_n: A_n \to A_{n-1}$ において $f_n(A_n)$ を $\operatorname{Im} f_n$, $f_n^{-1}(0)$ は $\operatorname{Ker} f_n$ とかくことにする．そして各 n に対して，$\operatorname{Im} f_{n+1} = \operatorname{Ker} f_n$ がなりたつとき，系列 $\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$ は完全であるという．

例 158.　X, A を加群とする．

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$$

が完全であるならば X と A は（f により）加群として同型である：$X \cong A$. 実際，$X \xrightarrow{f} A \to 0$ が完全であることは f が全射であることを意味し，$0 \to X \xrightarrow{f} A$ が完全であることは f が単射であることを意味している．したがって f は加群の同型写像である．

例 159.　X を加群とする．

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} \boldsymbol{Z}_2 \xrightarrow{g} \boldsymbol{Z}_2 \longrightarrow 0$$

が完全であるならば $X = 0$ である．実際，$\boldsymbol{Z}_2 \xrightarrow{g} \boldsymbol{Z}_2 \to 0$ が完全であるから g は全射である．$\boldsymbol{Z}_2$ は2つの元からなる集合であるから全射 g は単射でもある．したがって $\operatorname{Ker} g = 0$ となり，完全の仮定より $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g = 0$ となる．一方 $0 \to X \xrightarrow{f} \boldsymbol{Z}_2$ が完全であるから f は単射である：$\operatorname{Ker} f = 0$.　$\operatorname{Im} f = 0$, $\operatorname{Ker} f = 0$ は $X = 0$ を意味している．

（5）ホモトピー群の完全系列

X, Y を位相空間，A, B をそれぞれ X, Y の部分空間とし，点 $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ を与える．また連続写像 $f: (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ が与えられているとする．このとき各元 $u \in \mathfrak{F}_n(X, A, x_0)$ に対して fu は $\mathfrak{F}_n(Y, B, y_0)$ の元であるから，写像 $f_\sharp: \mathfrak{F}_n(X, A, x_0) \to \mathfrak{F}_n(Y, B, y_0)$ を

$$f_\sharp(u) = fu$$

で定義する．$u, v \in \mathfrak{F}_n(X, A, x_0)$ が $u \sim v\ (F)$ ならば $fu \sim fv\ (fF)$ であるから $f_\sharp$ は写像

$$f_*: \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$$

を誘導する．$n \geqq 2$ のとき f_* は準同型写像である． 実際， $u, v \in \mathfrak{F}_n(X, A, x_0)$ に対して明らかに $f(u+v) = f(u) + f(v)$ がなりたつので， $f_*([u]+[v]) = f_*([u]) + f_*([v])$ となるからである． この写像 f_* を連続写像 $f: (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ より**誘導された準同型写像**という． $A = x_0, B = y_0$ のときには連続写像 $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ は準同型写像

$$f_*: \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0), \quad n \geqq 1$$

を誘導することに注意しておこう．

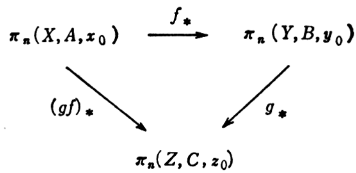
補題 170. X, Y, Z を位相空間とし，$x_0 \in A \subset X, y_0 \in B \subset Y, z_0 \in C \subset Z$ とする．このときつぎの (1), (2) がなりたつ．

(1) 恒等写像 $1: X \to X$ に対して $1_*: \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)$ は恒等写像である．

(2) 連続写像 $f: (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$, $g: (Y, B, y_0) \to (Z, C, z_0)$ に対して

$$(gf)_* = g_* f_*$$

がなりたつ．



特に包含写像 $i: (A, x_0) \to (X, x_0)$, $j: (X, x_0, x_0) \to (X, A, x_0)$ はそれぞれ写像

$$i_*: \pi_n(A, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$$

(i_* は $n \geqq 0$ に対して定義され，$n \geqq 1$ のとき準同型写像である)

$$j_*: \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_0)$$

(j_* は $n \geqq 1$ に対して定義され，$n \geqq 2$ のとき準同型写像である) を誘導している．

つぎに写像 $\partial: \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$ ($n \geqq 1$) を定義しよう．元 $u \in \mathfrak{F}_n(X, A, x_0)$，すなわち連続写像 $u: (I^n, \dot{I}^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ に対して u の I^{n-1} への制限 $u|I^{n-1}$ を考えると連続写像 $u|I^{n-1}: (I^{n-1}, \dot{I}^{n-1}) \to (A, x_0)$ を得る．すなわち $u|I^{n-1} \in \mathfrak{F}_{n-1}(A, x_0)$である．$u, v \in \mathfrak{F}_n(X, A, x_0)$が $u \sim v\ (F)$ ならば$u|I^{n-1} \sim v|I^{n-1}\ (F|I^{n-1})$ であるから，写像 ∂ を

$$\partial: \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(A, x_0)$$

$$\partial[u] = [u|I^{n-1}]$$

で定義する． $n \geqq 2$ のときには明らかに $(u+v)|I^{n-1} = u|I^{n-1} + v|I^{n-1}$ がなりたつので ∂ は準同型写像である．この ∂ をホモトピー群の**境界準同型写像** ($n=1$ のときには ∂ は単なる写像にすぎないが) という．

これだけ準備しておいて，つぎのホモトピー群の完全系列がなりたつことを証明しよう．この完全系列はホモトピー群を計算するとき非常に重要な役割を果す．

命題 171.　X を位相空間，A は X の空でない部分空間とし，かつ点 $x_0 \in A$ を与える．このときつぎの系列は完全である．

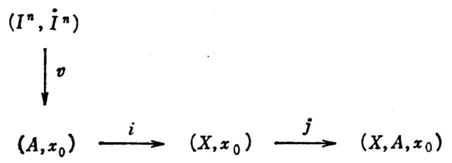
$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \cdots$$

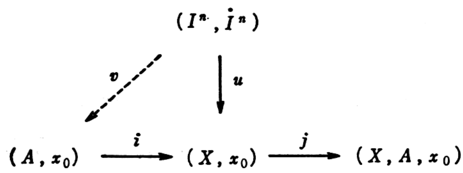
$$\cdots \longrightarrow \pi_2(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_2(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0)$$

$$\xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0)$$

$\pi_2(X, A, x_0)$, $\pi_1(X, x_0)$, $\pi_1(A, x_0)$ は加群であるとは限らず一般には群である．また $\pi_1(X, A, x_0)$, $\pi_0(A, x_0)$, $\pi_0(X, x_0)$ は単なる集合にすぎないが 220 頁の注意の意味において完全である．

証明　(i)　$\mathrm{Im}\, i_* \subset \mathrm{Ker}\, j_*$ である．実際，$\beta = [v] \in \pi_n(A, x_0)$ に対して，写像 jiv : $(I^n, \dot{I}^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ は $jiv(I^n) \subset A$ をみたしている．ゆえに $[jiv] = 0$ (補題 169)，すなわち $j_*i_*(\beta) = 0$ である．したがって $j_*i_* = 0$ となり $\mathrm{Im}\, i_* \subset \mathrm{Ker}\, j_*$ が示された．逆に $\mathrm{Ker}\, j_* \subset \mathrm{Im}\, i_*$ を示そう．$\alpha = [u] \in \pi_n(X, x_0)$，$u: (I^n, \dot{I}^n) \to (X, x_0)$ が $j_*\alpha = [ju] = 0$ であるとする．すなわち $ju \sim 0$ であるから ju と 0 を結ぶホモトピー $h: (I^n \times I, \dot{I}^n \times I, J^{n-1} \times I) \to (X, A, x_0)$ が存在して





$$\begin{cases} h(t_1, \cdots, t_n, 0) = u(t_1, \cdots, t_n) \\ h(t_1, \cdots, t_n, 1) = x_0 \end{cases}$$

をみたしている．いま写像 $f: (I^n \times I, \dot{I}^n \times I) \to (X, x_0)$ を

$$f(t_1, \cdots, t_n, s) = \begin{cases} h(t_1, \cdots, t_{n-1}, 0, 2t_n) & 0 \leqq t_n \leqq s/2 \\ h\left(t_1, \cdots, t_{n-1}, \dfrac{2t_n - s}{2 - s}, s\right) & s/2 \leqq t_n \leqq 1 \end{cases}$$

と定義する．($t_n = s/2$ のとき f の 2 つの定義が一致すること (補題 39) と $f(\dot{I}^n \times I) = x_0$ を確かめねばならないが，後者は $h(J^{n-1} \times I) = x_0$ と $t_n = 0$ のとき $f(t_1, \cdots, t_{n-1}, 0,$

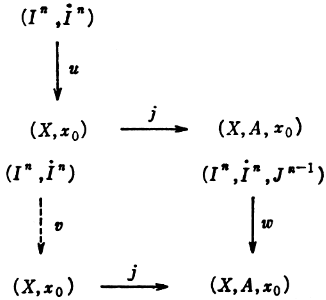
$s) = h(t_1, \cdots, t_{n-1}, 0, 0) = u(t_1, \cdots, t_{n-1}, 0) = x_0$ であるからよい). さて写像 $v: (I^n, \dot{I}^n) \to (A, x_0)$ を

$$v(t_1, \cdots, t_n) = f(t_1, \cdots, t_n, 1)$$

と定義する. ($v(I^n) \subset A$ であることは

$$v(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} h(t_1, \cdots, t_{n-1}, 0, 2t_n) \in A & 0 \leqq t_n \leqq 1/2 \\ h(t_1, \cdots, t_{n-1}, 2t_{n-1}-1, 1) = x_0 & 1/2 \leqq t_n \leqq 1 \end{cases}$$

からよく, また $v(\dot{I}^n) = x_0$ もよい). このとき $f(t_1, \cdots, t_n, 0) = h(t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n, 0) = u(t_1, \cdots, t_n)$, $f(t_1, \cdots, t_n, 1) = v(t_1, \cdots, t_n)$ であるから $u \sim iv(f)$ である. したがって $\beta = [v] \in \pi_n(A, x_0)$ とおくと $i_*(\beta) = [iv] = [u] = \alpha$ となり $\mathrm{Ker}\, j_* \subset \mathrm{Im}\, i_*$ が示された.



(ii) $\mathrm{Im}\, j_* \subset \mathrm{Ker}\, \partial$ である. 実際, $\alpha = [u] \in \pi_n(X, x_0)$ に対して写像 $v = ju | I^{n-1}: (I^{n-1}, \dot{I}^{n-1}) \to (A, x_0)$ は $v(I^{n-1}) = x_0$ をみたしている. ゆえに $\partial j_*(\alpha) = [ju | I^{n-1}] = [v] = 0$ である. よって $\partial j_* = 0$, すなわち $\mathrm{Im}\, j_* \subset \mathrm{Ker}\, \partial$ が示された. 逆に $\mathrm{Ker}\, \partial \subset \mathrm{Im}\, j_*$ を示そう. $\gamma = [w] \in \pi_n(X, A, x_0)$ が $\partial\gamma = [w | I^{n-1}] = 0$ であるとすると $w | I^{n-1} \sim 0$ であるから, $w | I^{n-1}$ と 0 を結ぶホモトピー $g: (I^{n-1} \times I, \dot{I}^{n-1} \times I) \to (A, x_0)$ が存在して

$$\begin{cases} g(t_1, \cdots, t_{n-1}, 0) = w(t_1, \cdots, t_{n-1}, 0) \\ g(t_1, \cdots, t_{n-1}, 1) = x_0 \end{cases}$$

をみたしている. いま写像 $h': I^n \times 0 \cup \dot{I}^n \times I = I^n \times 0 \cup I^{n-1} \times I \cup J^{n-1} \times I \to X$ を

$$\begin{cases} h'(t_1, \cdots, t_n, 0) = w(t_1, \cdots, t_n) & \\ h'(t_1, \cdots, t_{n-1}, 0, s) = g(t_1, \cdots, t_{n-1}, s) & (t_1, \cdots, t_{n-1}) \in I^{n-1} \\ h'(t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n, s) = x_0 & (t_1, \cdots, t_n) \in J^{n-1} \end{cases}$$

と定義すると h' は連続である (共通部分で h' の定義が一致している (補題 39)). $I^n \times 0 \cup \dot{I}^n \times I$ は $I^n \times I$ の (強変位) レトラクトである (例 150) から, h' は連続写像 $h: I^n \times I \to X$ に拡張することができる (補題 130). この h は明らかに写像 $h: (I^n \times I, \dot{I}^n \times I, J^{n-1} \times I) \to (X, A, x_0)$ である. さて写像 $u: (I^n, \dot{I}^n) \to (X, x_0)$ を

$$u(t_1, \cdots, t_n) = h(t_1, \cdots, t_n, 1)$$

と定義する．このとき $h(t_1, \cdots, t_n, 0) = w(t_1, \cdots, t_n)$, $h(t_1, \cdots, t_n, 1) = u(t_1, \cdots, t_n)$ であるから $w \sim ju\,(h)$ である．したがって $\alpha = [u] \in \pi_n(X, x_0)$ とおくと $j_*(\alpha) = [ju] = [w] = \gamma$ であるから，$\mathrm{Ker}\,\partial \subset \mathrm{Im}\, j_*$ が示された．

(iii)　$\mathrm{Im}\,\partial \subset \mathrm{Ker}\, i_*$ である．実際，$\gamma = [w] \in \pi_n(X, A, x_0)$, $w : (I^n, \dot{I}^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ に対して $v = w | I^{n-1}$, $u = iv : (I^{n-1}, \dot{I}^{n-1}) \to (X, x_0)$ とおくとき，$w(t_1, \cdots, t_{n-1}, 0) = u(t_1, \cdots, t_{n-1})$, $w(t_1, \cdots, t_{n-1}, 1) = x_0$ であるから $u \sim 0\,(w)$ である．ゆえに $i_*\partial(\gamma) = [iv] = [u] = 0$ である．よって $i_*\partial = 0$, すなわち $\mathrm{Im}\,\partial \subset \mathrm{Ker}\, i_*$ が示された．逆に $\mathrm{Ker}\, i_* \subset \mathrm{Im}\,\partial$ を示そう．$\beta = [v] \in \pi_{n-1}(A, x_0)$, $v : (I^{n-1}, \dot{I}^{n-1}) \to (A, x_0)$ が $i_*(\beta) = [iv] = 0$ であるとする．すなわち $iv \sim 0$ であるから，iv と 0 を結ぶホモトピー $g : (I^{n-1} \times I, \dot{I}^{n-1} \times I) \to (X, x_0)$ が存在して

$$\begin{cases} g(t_1, \cdots, t_{n-1}, 0) = v(t_1, \cdots, t_{n-1}) \\ g(t_1, \cdots, t_{n-1}, 1) = x_0 \end{cases}$$

をみたしている．さて写像 $w : (I^n, \dot{I}^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ を

$$w(t_1, \cdots, t_n) = g(t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n)$$

と定義すると $w | I^{n-1} = v$ である．したがって $\gamma = [w] \in \pi_n(X, A, x_0)$ とおくと $\partial(\gamma) = [w | I^{n-1}] = [v] = \beta$ であるから，$\mathrm{Ker}\, i_* \subset \mathrm{Im}\,\partial$ が示された．以上で命題が証明された．

(6)　ファイバー空間におけるホモトピー完全系列

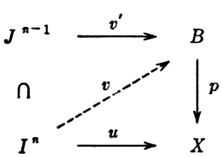
ファイバー空間 (B, p, X, F) の B, X, F のホモトピー群の関係を示す完全系列（命題 173）を証明しよう．そのためにはつぎの補題が本質的である．

補題 172.　(Hurewicz-Steenrod)　(B, p, X) を Serre のファイバー空間とし，$x_0 \in X$, $b_0 \in p^{-1}(x_0) = F$ とする．このとき

$$p_* : \pi_n(B, F, b_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \qquad n \geqq 2$$

は群の同型写像である．$n = 1$ のとき（$\pi_1(B, F, b_0)$ は群ではなくて単なる集合にすぎないが）p_* は全単射である．

証明　$n \geqq 2$ のとき p_* は準同型写像である（221 頁）から，$n = 1$ のときを含めて p_* が全単射であることを示せば十分である．まず p_* が全射であることを示そう．$\alpha = [u] \in \pi_n(X, x_0)$, $u : (I^n, \dot{I}^n) \to (X, x_0)$ を与える．写像 $v' : J^{n-1} \to B$ を $v'(t_1, \cdots, t_n) = b_0$ と定義すると明らかに $pv' = u | J^{n-1}$ をみたしている．J^{n-1} は I^n の強変位レトラクトである（例 151）から，被覆ホモトピー性質よ

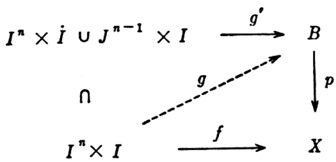


り v' の拡張でありかつ $pv=u$ をみたす連続写像 $v: I^n \to B$ が存在する. $pv=u$ であるから, v は写像 $v: (I^n, \dot{I}^n, J^{n-1}) \to (B, F, x_0)$ であることがわかる. したがって $\beta = [v] \in \pi_n(B, F, b_0)$ とおくと $p_*(\beta) = [pv] = [u] = \alpha$ となり, p_* が全射であることが証明された. つぎに p_* が単射であることを示そう. $\alpha = [u], \beta = [v] \in \pi_n(B, F, b_0)$, $u, v: (I^n, \dot{I}^n, J^{n-1}) \to (B, F, b_0)$ に対して $p_*(\alpha) = p_*(\beta)$ であるとする. このとき $pu \sim pv$ であるから, pu と pv を結ぶホモトピー $f: (I^n \times I, \dot{I}^n \times I) \to (X, x_0)$ が存在して

$$\begin{cases} f(t_1, \cdots, t_n, 0) = pu(t_1, \cdots, t_n) \\ f(t_1, \cdots, t_n, 1) = pv(t_1, \cdots, t_n) \end{cases}$$

をみたしている. いま写像 $g': I^n \times \dot{I} \cup J^{n-1} \times I \to B$ を

$$\begin{cases} g'(t_1, \cdots, t_n, 0) = u(t_1, \cdots, t_n) \\ g'(t_1, \cdots, t_n, 1) = v(t_1, \cdots, t_n) \\ g'(J^{n-1} \times I) = b_0 \end{cases}$$



と定義すると g' は連続であって (共通部分で g' の定義が一致している (補題 39)) $pg' = f|(I^n \times \dot{I} \cup J^{n-1} \times I)$ をみたしている. $I^n \times \dot{I} \cup J^{n-1} \times I$ は $I^n \times I$ の強変位レトラクトである (例 152) から, 被覆ホモトピー性質より g' の拡張でありかつ $pg=f$ をみたす連続写像 $g: I^n \times I \to B$ が存在する. $pg=f$ であるから g は写像 $g: (I^n \times I, \dot{I}^n \times I, J^{n-1} \times I) \to (B, F, b_0)$ であることがわかる. このとき $g(t_1, \cdots, t_n, 0) = u(t_1, \cdots, t_n)$, $g(t_1, \cdots, t_n, 1) = v(t_1, \cdots, t_n)$ であるから $u \sim v\ (g)$ となる. したがって $\alpha = [u] = [v] = \beta$ となり p^* が単射であることが証明された.

定義 (B, p, X) を Serre のファイバー空間とし $x_0 \in X$, $b_0 \in p^{-1}(x_0) = F$ とする. このとき $n \geqq 1$ に対して写像

$$\Delta: \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, b_0)$$
$$\left(\pi_n(X, x_0) \xleftarrow{p_*} \pi_n(B, F, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, b_0)\right)$$

を $\Delta = \partial p_*^{-1}$ と定義する. $n \geqq 2$ のときには Δ は準同型写像である. この Δ をファイバー空間 (B, p, X) のホモトピー群における**境界準同型写像**という ($n=1$ のときには単なる写像にすぎないが).

命題 173. (B, p, X) を Serre のファイバー空間とし, $x_0 \in X$, $b_0 \in p^{-1}(x_0) = F$ とする. このときつぎの系列は完全である.

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F, b_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(F, b_0) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(B,\, b_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X,\, x_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_0(F,\, b_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(B,\, b_0)$$

証明

$$\longrightarrow \pi_n(F,b_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(B,b_0) \begin{array}{c} \nearrow^{j_*} \\ \searrow_{p_*} \end{array} \begin{array}{c} \pi_n(B,F,b_0) \\ p_* \downarrow \uparrow p_*^{-1} \\ \pi_n(X,x_0) \end{array} \begin{array}{c} \searrow^{\partial} \\ \nearrow_{\Delta} \end{array} \pi_{n-1}(F,b_0) \longrightarrow \cdots\cdots$$

$(B,\ F,\ b_0)$ に対して命題 171 を用いると上回りの系列は完全である．しかるに $p_*j_* = p_*$, $\partial p_*^{-1} = \Delta$ であるから補題 172 を用いると下回りの完全系列におきかえられる．

ファイバー空間 $(B,\ p,\ X,\ F)$ は Serre のファイバー空間である（命題 133）から，命題 173 はファイバー空間に対してなりたっていることに注意しておこう．

§7．射影空間と古典群の基本群

前節で証明したファイバー空間におけるホモトピー群の完全系列を用いて射影空間および古典群の基本群を求めるのであるが，そのためには球面 S^n の 2 次元ホモトピー群が必要となる．しかしつぎの定理を証明なしに用いることにする．

定理 57. 球面 S^n $(n \geqq 2)$ に対して $\pi_i(S^n) = 0,\ 1 \leqq i < n$ である．

この定理はつぎの方針で証明するのが普通である．まず $S^n (n \geqq 2)$ が単連結である（定理 55 参照）ことに注意し，つぎに S^n のホモロジー群 $H_i(S^n)$ を計算して $(H_i(S^n) = 0,$ $1 \leqq i < n$ である（付録例 171））**Hurewicz の定理**「単連結空間 X のホモロジー群 $H_i(X)$ が $H_i(X) = 0,\ 1 \leqq i < n$ ならば，ホモトピー群 $\pi_i(X)$ も $\pi_i(X) = 0,\ 1 \leqq i < n$ である」を用いる．また単体近似定理を用いる方法もある．

球面 S^n のホモトピー群 $\pi_i(S^n),\ i > n$ を計算することは重要であるが，また非常に難かしい問題であって位相幾何学の 1 つの大きい分野を占めている．H. Toda（戸田宏）はじめ J. F. Adams 等の努力により現在 $\pi_{n+k}(S^n),\ k \leqq 23$ あたりまで計算されている．

(1) 射影空間の基本群

射影空間 KP_n の基本群はつぎのようである．

定理 58. (1) $\pi_1(RP_1) \cong Z,\quad \pi_1(RP_n) \cong Z_2\ (n \geqq 2)$

(2) CP_n, HP_n は単連結である：

$$\pi_1(CP_n) = 0, \qquad \pi_1(HP_n) = 0$$

証明 (1) $RP_1 \simeq S^1$ である（定理 28）から $\pi_1(RP_1) \cong Z$ である（定理 54）．π_1

$(RP_n)\cong Z_2$ $(n\geqq 2)$ はすでに証明した（定理 56）が，ここではホモトピー群の完全系列（命題 173）を用いる別証明を与えておこう．ファイバー空間 (S^n, p, RP_n, S^0)（定理 49）に命題 173 を用いると，完全系列

$$\pi_1(S^n) \xrightarrow{p_*} \pi_1(RP_n) \xrightarrow{\varDelta} \pi_0(S^0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(S^n)$$

すなわち

$$\underset{(n\geqq 2\ (\text{定理 }55))}{0} \longrightarrow \pi_1(RP_n) \xrightarrow{\varDelta} Z_2 \longrightarrow \underset{(\text{定理 }4)}{0}$$

を得る．これより $\pi_1(RP_n)$ と Z_2 は集合として同型である（例 158 参照）ことがわかる．しかるに 2 つの元からなる群は Z_2 と群として同型である（例 36）から $\pi_1(RP_n)\cong Z_2$ を得る．

（2） ファイバー空間 (S^{2n+1}, p, CP_n, S^1)（定理 49）に対してホモトピー完全系列（命題 173）を用いると，完全系列

$$\pi_1(S^{2n+1}) \xrightarrow{p_*} \pi_1(CP_n) \xrightarrow{\varDelta} \pi_0(S^1)$$

すなわち

$$\underset{(\text{定理 }55)}{0} \longrightarrow \pi_1(CP_n) \longrightarrow \underset{(\text{定理 }4)}{0}$$

を得る．よって $\pi_1(CP_n)=0$ である．同様にファイバー空間 (S^{4n+3}, p, HP_n, S^3)（定理 49）を用いると $\pi_1(HP_n)=0$ を得る．

例 160. ファイバー空間 (R, p, S^1, Z)（例 144）に対してホモトピー完全系列（命題 173）を用いると，完全系列

$$\pi_1(R) \xrightarrow{p_*} \pi_1(S^1) \xrightarrow{\varDelta} \pi_0(Z) \xrightarrow{i_*} \pi_0(R)$$

すなわち

$$\underset{(\text{例 }153)}{0} \longrightarrow \pi_1(S^1) \xrightarrow{\varDelta} Z \longrightarrow \underset{(\text{例 }90)}{0}$$

を得る．これより $\pi_1(S^1)$ は Z と集合として同型であることがわかる（例 158 参照）が，$\pi_1(S^1)$ と Z が群として同型であることはこれからは結論されない．したがってこれは $\pi_1(S^1)\cong Z$（定理 54）の別証明にはなっていない．

（2） 古典群の基本群

古典群 $G(n, K)$, $SG(n, K)$ の基本群はつぎのようである．ただし $O(n)$ は弧状連結で

ないので除いてある.

定理 59.

	群	基本群	
(1)	$SO(1)=\{1\}$	0	
	$SO(2)\cong S^1$	$\boldsymbol{Z}$	
	$SO(n)$	$\boldsymbol{Z}_2$	$(n\geqq 3)$
(2)	$SU(n)$	0	
	$U(n)\simeq S^1\times SU(n)$	$\boldsymbol{Z}$	
(3)	$Sp(n)$	0	

証明 (1) $SO(1)=\{1\}$, $SO(2)\cong S^1$ (例 51) であるから $\pi_1(SO(1))=0$, $\pi_1(SO(2))\cong\boldsymbol{Z}$ (定理 54) である. $SO(3)\simeq \boldsymbol{RP}_3$ である (定理 26) から $\pi_1(SO(3))\cong\boldsymbol{Z}_2$ を得る (定理 56). $n\geqq 4$ に対しては, n に関する帰納法を用いることにして $\pi_1(SO(n-1))\cong\boldsymbol{Z}_2$ と仮定する. ファイバー空間 $SO(n)/SO(n-1)=S^{n-1}$ (定理 50) にホモトピー完全系列 (命題 173) を用いると, 完全系列

$$\pi_2(S^{n-1})\xrightarrow{\Delta}\pi_1(SO(n-1))\xrightarrow{i_*}\pi_1(SO(n))\xrightarrow{p_*}\pi_1(S^{n-1})$$

すなわち

$$0\longrightarrow\boldsymbol{Z}_2\xrightarrow{i_*}\pi_1(SO(n))\longrightarrow 0$$

を得る. これより $\pi_1(SO(n))\cong\boldsymbol{Z}_2$ がわかる (例 158).

(2) $SU(1)=\{1\}$ であるから $\pi_1(SU(1))=0$ である. n に関する帰納法を用いることにして $\pi_1(SU(n-1))=0$ と仮定する. ファイバー空間 $SU(n)/SU(n-1)=S^{2n-1}$ (定理 50) にホモトピー完全系列 (命題 173) を用いると, 完全系列

$$\pi_1(SU(n-1))\xrightarrow{i_*}\pi_1(SU(n))\xrightarrow{p_*}\pi_1(S^{2n-1})$$

すなわち

$$0\longrightarrow\pi_1(SU(n))\longrightarrow 0$$

を得る. これより $\pi_1(SU(n))=0$ がわかる. また $U(n)\simeq S^1\times SU(n)$ である (定理 17) から $\pi_1(U(n))\cong\pi_1(S^1)\oplus\pi_1(SU(n))$ (命題 143) $\cong\boldsymbol{Z}\oplus 0\cong\boldsymbol{Z}$ である.

(3) $Sp(1)\cong S^3$ であるから $\pi_1(Sp(1))=0$ である (定理 55). ゆえにファイバー空間 $Sp(n)/Sp(n-1)=S^{4n-1}$ (定理 50) を用いて $SU(n)$ のときと同様にすると $\pi_1(Sp(n))=0$ を得る.

一般線形群 $GL(n, K)$ および特殊線形群 $SL(n, K)$ の基本群はつぎのようである. た

だし $GL(n, \boldsymbol{R})$ は弧状連結でないので除いてある.

定理 60. (岩沢分解も表示しておいた)

	群	基本群	
(1)	$GL(n, \boldsymbol{C}) \simeq U(n) \times \boldsymbol{R}^{n^2}$	$\boldsymbol{Z}$	
	$GL(n, \boldsymbol{H}) \simeq Sp(n) \times \boldsymbol{R}^{n(2n-1)}$	0	
(2)	$SL(1, \boldsymbol{R}) = \{1\}$	0	
	$SL(2, \boldsymbol{R}) \simeq SO(2) \times \boldsymbol{R}^2$	$\boldsymbol{Z}$	
	$SL(n, \boldsymbol{R}) \simeq SO(n) \times \boldsymbol{R}^{(n+2)(n-1)/2}$	$\boldsymbol{Z}_2$	$(n \geqq 3)$
	$SL(n, \boldsymbol{C}) \simeq SU(n) \times \boldsymbol{R}^{n^2-1}$	0	

証明 $\pi_1(\boldsymbol{R}^m) = 0$ (例 153) に注意して, $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \oplus \pi_1(Y)$ (命題 143) と定理 59 を用いるとよい.

回転群 $SO(n)$ $(n \geqq 3)$ の基本群は $\boldsymbol{Z}_2$ と群として同型であった (定理 59). すなわち $SO(n)$ は単連結ではないので $SO(n)$ の普遍被覆群が (位相群の同型を除いて) ただ1つ存在する (命題 161). $SO(n)$ $(n \geqq 3)$ の普遍被覆群を $Spin(n)$ で (詳しくは $(Spin(n), p, SO(n))$ で) 表わし, **スピノル群** という. $p : Spin(n) \to SO(n)$ の核 N は $\pi_1(SO(n)) \cong \boldsymbol{Z}_2$ と群として同型である (命題 163) から N は2つの元からなる群である. したがって核 N を S^0 と表わすことにすると位相群としての同型

$$Spin(n)/S^0 \cong SO(n)$$

を得る (命題 163). しかるに S^0, $SO(n)$ はコンパクト群である (定理 7) から $Spin(n)$ もまたコンパクト群である (命題 83). このことと定理 59 とをあわせて定理としてまとめておこう.

定理 61. $SU(n)$, $Spin(n)$ $(n \geqq 3)$, $Sp(n)$ は単連結なコンパクト群である.

なお単連結なコンパクト単純 Lie 群 (215 頁) は $SU(n)$, $Spin(n)$ $(n \geqq 5)$, $Sp(n)$ および例外群とよばれている5つの Lie 群 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 に限ることが知られており, また (単純性を落せば) 単連結コンパクト Lie 群はこれらの群の直積であることが知られている.

§8. スピノル群

前節において回転群 $SO(n)$ $(n \geqq 3)$ の被覆群 $Spin(n)$ を定義したが, §5における被覆群のつくり方は, $SO(n)$ の道の集合 $\Omega(SO(n)\,;\,e, SO(n))$ をホモトープの関係で類別

した集合に適当に積と位相を定義して位相群を構成する方法であった．しかしこの方法は一般論にはよいかも知れないが，$Spin(n)$ の性質を更に詳しく調べるには余りよい構成法とはいえない．以下別の方法で $SO(n)$ の被覆群 $Spin(n)$ を構成することにしよう．

(1) Clifford 代数

定義　A を集合とし，K を可換体（ここでは実数体 $\boldsymbol{R}$ 以外用いない）とする．A の任意の2つの元 u, v および K の元 λ に対して算法 $u+v\in A$, $uv\in A$, $\lambda u=u\lambda\in A$ が定義されていて，$u+v$, λu に関して A は K-加群をなし，さらに

(1)　$(uv)w=u(vw)$

(2)　$u(v+w)=uv+uw,\quad (v+w)u=vu+wu$

(3)　$\lambda(uv)=(\lambda u)v=u(\lambda v)$

をみたすとき A を **K-多元環**という．K-多元環 A において，A の任意の元 u に対して

(4)　$1u=u1=u$

をみたす A の元1が存在するるとき1を A の**単位元**という．また A を単位元1を**もつ K-多元環**という．

A, B を2つの K-多元環とする．A と B との間に

$$\begin{aligned} &f(u+v)=f(u)+f(v),\quad f(\lambda u)=\lambda f(u) \\ &f(uv)=f(u)f(v) \end{aligned}\qquad u, v\in A,\ \lambda\in K$$

をみたす全単射 $f: A\to B$ が存在するとき A と B は **K-多元環として同型**であるという．

例 161.　$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ はそれぞれ 1, 2, 4 次元の $\boldsymbol{R}$-多元環である．いずれも単位元1をもっている．

例 162.　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$; $d=1, 2, 4$ とする．$M(n, K)$ は行列の和 $A+B$, 積 AB, および λA $(\lambda\in\boldsymbol{R})$ の算法に関して，dn^2 次元の $\boldsymbol{R}$-多元環である．単位行列 E は $\boldsymbol{R}$-多元環 $M(n, K)$ の単位元になっている．

スピノル群 $Spin(n)$ を定義するためにまず Clifford 代数の説明から始めよう．詳しい定義は付録 (6) でかくことにしてここではその概略を述べることにする．2^n 個 $(n\geqq 1)$ の元

$$1,\quad e_1, \cdots, e_n,\ e_1e_2, \cdots, e_ie_j\ (i<j), \cdots, e_{n-1}e_n, \cdots,$$
$$e_{i_1}\cdots e_{i_k}\ (i_1<\cdots<i_k), \cdots, e_1\cdots e_n$$

を基とする実数体 $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間を $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ で表わし，この基の間に積をつぎのように定義する．

$$(e_{i_1}\cdots e_{i_k})(e_{j_1}\cdots e_{j_l}) = e_{i_1}\cdots e_{i_k}e_{j_1}\cdots e_{j_l}$$

ただし $e_i{}^2 = -1\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, $e_ie_j = -e_je_i\ (i \neq j)$, $(\lambda 1)e_i = e_i(\lambda 1) = \lambda e_i\ (\lambda \in \boldsymbol{R})$ の関係をいれておく．さらに1は積の単位元であるとする．そして分配法則を認めると $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ に積が定義されて $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ は単位元1をもつ 2^n 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環となる．このようにして得られた $\boldsymbol{R}$-多元環 $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ を **Clifford 代数**という．$\lambda \in \boldsymbol{R}$ と $\lambda 1 \in C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ を同一視して

$$\boldsymbol{R} \subset C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$$

とみなしておく．

例 163. Clifford 代数 $C(\boldsymbol{R}_-{}^1)$ は $\boldsymbol{C}$（例161）と $\boldsymbol{R}$-多元環として同型である．実際，$C(\boldsymbol{R}_-{}^1)$ の元 u は $u = \lambda + \mu e_1$（$\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$, $e_1{}^2 = -1$）と1通りに表わされるので，写像 $f: C(\boldsymbol{R}_-{}^1) \to \boldsymbol{C}$ を

$$f(\lambda + \mu e_1) = \lambda + \mu i$$

と定義すると，f は $\boldsymbol{R}$-多元環としての同型を与えている．

例 164. Clifford 代数 $C(\boldsymbol{R}_-{}^2)$ は $\boldsymbol{H}$（例161）と $\boldsymbol{R}$-多元環として同型である．実際，$C(\boldsymbol{R}_-{}^2)$ の元 u は $u = \kappa + \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_1e_2$（$\kappa, \lambda, \mu, \nu \in \boldsymbol{R}$）と1通りに表わされ，基の間の積 $e_1{}^2 = -1, e_2{}^2 = -1, (e_1e_2)^2 = e_1(e_2e_1)e_2 = -e_1e_1e_2e_2 = -(-1)(-1) = -1$ は $\boldsymbol{H}$ における積 $i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1$ に対応しており，さらに積 $e_1e_2 = -e_2e_1$, $(e_1e_2)e_1 = -e_1(e_1e_2) = e_2$, $e_2(e_1e_2) = -(e_1e_2)e_2 = e_1$ はそれぞれ積 $ij = -ji = k$, $ki = -ik = j$, $jk = -kj = i$ に対応しているので，写像 $f: C(\boldsymbol{R}_-{}^2) \to \boldsymbol{H}$ を

$$f(\kappa + \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_1e_2) = \kappa + \lambda i + \mu j + \nu k$$

と定義すると f は $\boldsymbol{R}$-多元環としての同型を与えている．

例 165. 2つの $\boldsymbol{H}$（例161）の直積集合 $\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} = \{(x, y) \mid x, y \in \boldsymbol{H}\}$ において

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \qquad \lambda \in \boldsymbol{R}$$
$$(x, y)(x', y') = (xx', yy')$$

と定義すると $\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}$ は単位元 $(1, 1)$ をもつ8次元 $\boldsymbol{R}$-多元環になる．この $\boldsymbol{R}$-多元環 $\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}$ を $\boldsymbol{H} \oplus \boldsymbol{H}$ で表わすのが普通である．そして Clifford 代数 $C(\boldsymbol{R}_-{}^3)$ は $\boldsymbol{H} \oplus \boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{R}$-多元環として同型である．実際，$\boldsymbol{R}$-準同型写像 $f: C(\boldsymbol{R}_-{}^3) \to \boldsymbol{H} \oplus \boldsymbol{H}$ を

$$1 \xrightarrow{f} (1,\ 1)$$
$$e_1 \longrightarrow (i,\ i)$$
$$e_2 \longrightarrow (j,\ j)$$
$$e_3 \longrightarrow (k,\ -k)$$
$$e_1e_2 \longrightarrow (k,\ k) \qquad e_1e_3 \longrightarrow (-j,\ j) \qquad e_2e_3 \longrightarrow (i,\ -i)$$
$$e_1e_2e_3 \longrightarrow (-1,\ 1)$$

と定義すると f は $\boldsymbol{R}$-多元環としての同型を与えている.

例 166. Clifford 代数 $C(\boldsymbol{R}_{-}^{4})$ は $M(2,\ \boldsymbol{H})$ (例 162) と $\boldsymbol{R}$-多元環として同型である. 実際, $\boldsymbol{R}$-準同型写像 $f: C(\boldsymbol{R}_{-}^{4}) \to M(2,\ \boldsymbol{H})$ を

$$1 \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} i & \\ & i \end{pmatrix} \qquad e_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} j & \\ & j \end{pmatrix}$$

$$e_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} k & \\ & -k \end{pmatrix} \qquad e_4 \longrightarrow \begin{pmatrix} & k \\ k & \end{pmatrix}$$

$$e_1e_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} k & \\ & k \end{pmatrix} \qquad e_1e_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} -j & \\ & j \end{pmatrix} \qquad e_1e_4 \longrightarrow \begin{pmatrix} & -j \\ -j & \end{pmatrix}$$

$$e_2e_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} \qquad e_2e_4 \longrightarrow \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix} \qquad e_3e_4 \longrightarrow \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$e_1e_2e_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \qquad e_1e_2e_4 \longrightarrow \begin{pmatrix} & -1 \\ -1 & \end{pmatrix}$$

$$e_1e_3e_4 \longrightarrow \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} \qquad e_2e_3e_4 \longrightarrow \begin{pmatrix} & -j \\ j & \end{pmatrix}$$

$$e_1e_2e_3e_4 \longrightarrow \begin{pmatrix} & -k \\ k & \end{pmatrix}$$

と定義すると f は $\boldsymbol{R}$-多元環としての同型を与えている.

写像 $\theta: \boldsymbol{R}^n \to C(\boldsymbol{R}_{-}^{n})$ を $\theta(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ ($\lambda_i \in \boldsymbol{R}$) と定義すると θ は単射でありかつ $\boldsymbol{R}$-加群の準同型写像であるから, θ を省略して $\boldsymbol{R}^n$ を $C(\boldsymbol{R}_{-}^{n})$ の部分 $\boldsymbol{R}$-加群とみなすことにする. したがって包含関係

$$S^{n-1} \subset \boldsymbol{R}^n \subset C(\boldsymbol{R}_{-}^{n})$$

を得る.

補題 174. $C(\boldsymbol{R}_{-}^{n})$ においてつぎの (1), (2) がなりたつ.

（1）$x \in \boldsymbol{R}^n$ ならば $x^2 = -(x, x)$ である．特に $a \in S^{n-1}$ ならば $a^2 = -1$ である．

（2）$(x, y) = 0$, $x, y \in \boldsymbol{R}^n$ ならば，$xy + yx = 0$ である．

証明（1）$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ に対して $x^2 = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j e_i e_j (e_i e_j + e_j e_i = 0\,(i \neq j),\ e_i^2 = -1$ を用いて$) = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = -(x, x)$ である．

（2）$x^2 = -(x, x)$ の x の代りに $x + y$ とおくと $(x+y)^2 = -(x+y, x+y)$，よって $x^2 + xy + yx + y^2 = -(x, x) - 2(x, y) - (y, y) = x^2 + y^2$ となり $xy + yx = 0$ を得る．

基 $1, e_1, \cdots, e_n, \cdots, e_i e_j, \cdots, e_{i_1} \cdots e_{i_k}, \cdots, e_1 \cdots e_n$ が $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ の正規直交基となるように $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ に内積（ , ）をいれる．すなわち $u = \lambda_0 + \sum \lambda_{i_1 \cdots i_k} e_{i_1} \cdots e_{i_k}$, $v = \mu_0 + \sum \mu_{i_1 \cdots i_k} e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ に対して内積を

$$(u, v) = \lambda_0 \mu_0 + \sum \lambda_{i_1 \cdots i_k} \mu_{i_1 \cdots i_k}$$

で定義すると $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ は内積をもつ 2^n 次元 $\boldsymbol{R}$-加群になる．したがって $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ の元 u の長さを $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ と定義し，$C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ の 2 つの元 u, v の距離を $d(u, v) = \|u - v\|$ と定義すると，$C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ は距離空間となり，かつ $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ は $\boldsymbol{R}^{2^n}$ と距離空間として同型となる：$C(\boldsymbol{R}_-{}^n) \simeq \boldsymbol{R}^{2^n}$.

$C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ においてつぎの 3 つの $\boldsymbol{R}$-準同型写像 $t, \omega, {}^-$ を定義しよう（$\boldsymbol{R}$-準同型写像であるから $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ の基に対して定義しておいて十分である）．

$$t, \omega, {}^- : C(\boldsymbol{R}_-{}^n) \longrightarrow C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$$

$${}^t 1 = 1, \quad {}^t(e_{i_1} \cdots e_{i_k}) = e_{i_k} \cdots e_{i_1}$$

$$1^\omega = 1, \quad (e_{i_1} \cdots e_{i_k})^\omega = (-1)^k e_{i_1} \cdots e_{i_k}$$

$$\bar{u} = {}^t u^\omega, \quad u \in C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$$

$C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ の部分 $\boldsymbol{R}$-加群 $C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n)$, $C^1(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ をそれぞれ

$$C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n) = \{u \in C(\boldsymbol{R}_-{}^n) \mid u = \lambda_0 + \sum \lambda_{i_1 \cdots i_k} e_{i_1} \cdots e_{i_k},\ k = 2, 4, \cdots\}$$

$$C^1(\boldsymbol{R}_-{}^n) = \{u \in C(\boldsymbol{R}_-{}^n) \mid u = \sum \lambda_{i_1 \cdots i_k} e_{i_1} \cdots e_{i_k},\ k = 1, 3, \cdots\}$$

と定義すると明らかに

$$C(\boldsymbol{R}_-{}^n) = C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n) \oplus C^1(\boldsymbol{R}_-{}^n) \qquad (\boldsymbol{R}\text{-加群の直和})$$

$$C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n)C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n) \subset C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n), \qquad C^1(\boldsymbol{R}_-{}^n)C^1(\boldsymbol{R}_-{}^n) \subset C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n)$$

$$C^1(\boldsymbol{R}_-{}^n)C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n) \subset C^1(\boldsymbol{R}_-{}^n), \qquad C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n)C^1(\boldsymbol{R}_-{}^n) \subset C^1(\boldsymbol{R}_-{}^n)$$

がなりたつ．特に $C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ は $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ の部分 $\boldsymbol{R}$-多元環である．

補題 175. （1） 写像 $\mu : C(\boldsymbol{R}_{-^n}) \times C(\boldsymbol{R}_{-^n}) \to C(\boldsymbol{R}_{-^n})$, $\mu(u, v) = uv$ は連続である.

（2） 写像 $t, \omega, {}^{-} : C(\boldsymbol{R}_{-^n}) \to C(\boldsymbol{R}_{-^n})$ はいずれも連続である.

（3） 元 $u \in C(\boldsymbol{R}_{-^n})$ に対して

$$u \in C^0(\boldsymbol{R}_{-^n}) \iff u^\omega = u, \qquad u = C^1(\boldsymbol{R}_{-^n}) \iff u^\omega = -u$$

がなりたつ.

（4） 任意の $u, v \in C(\boldsymbol{R}_{-^n})$ に対して ${}^t(uv) = {}^tv{}^tu$, $(uv)^\omega = u^\omega v^\omega$, $\overline{uv} = \bar{v}\bar{u}$ がなりたつ.

証明はいずれも明らかである.

補題 176. 元 $c \in C(\boldsymbol{R}_{-^n})$ が任意の $x \in \boldsymbol{R}^n$ に対して

$$cx = xc^\omega$$

をみたすならば $c \in \boldsymbol{R}$ である.

証明 c を $c = c^0 + c^1$, $c^0 \in C^0(\boldsymbol{R}_{-^n})$, $c^1 \in C^1(\boldsymbol{R}_{-^n})$ と表わすとき, $c^\omega = c^0 - c^1$ であるから, $cx = xc^\omega$ が任意の $x \in \boldsymbol{R}^n$ に対してなりたつという条件は

$$c^0x = xc^0, \qquad c^1x = -xc^1$$

が任意の $x \in \boldsymbol{R}^n$ に対してなりたつことを意味する. $c^0 = a^0 + e_1a^1$ ($a^0 \in C^0(\boldsymbol{R}_{-^n})$, $a^1 \in C^1(\boldsymbol{R}_{-^n})$ であって, かつ a^0, a^1 の各項には e_1 が現われない) と表わしておく. $c^0x = xc^0$ において$x = e_1$ とおくと

$$(a^0 + e_1a^1)e_1 = e_1(a^0 + e_1a^1)$$

となる. a^0, a^1 には e_1 が現われないので $a^0e_1 = e_1a^0$, $a^1e_1 = -e_1a^1$ であることに注意すると,

$$a^0e_1 + a^1 = a^0e_1 - a^1$$

となる. ゆえに $2a^1 = 0$, $a^1 = 0$, よって, $c^0 = a^0$ となるので c^0 の各項は e_1 を含まない. 同様に c^0 の各項は $e_2, \cdots, e_n$ を含まない. これは $c^0 \in \boldsymbol{R}$ であることを示している. つぎに $c^1 = b^1 + e_1b^0$ ($b^1 \in C^1(\boldsymbol{R}_{-^n})$, $b^0 \in C^0(\boldsymbol{R}_{-^n})$ であって, かつ b^1, b^0 の各項には e_1 が現われない) と表わし, $c^1x = -xc^1$ において $x = e_1$ とおくと $(b^1 + e_1b^0)e_1 = -e_1(b^1 + e_1b^0)$ となる. $b^0e_1 = e_1b^0$, $b^1e_1 = -e_1b^1$ であるから $b^1e_1 - b^0 = b^1e_1 + b^0$ となり, $b^0 = 0$ を得る. ゆえに $c^1 = b^1$ となるので c^1 の各項は e_1 を含まない. 同様に c^1 の各項は $e_2, \cdots, e_n$ を含まない. しかるに c^1 は $C^1(\boldsymbol{R}_{-^n})$ の元であるから $c^1 = 0$ である. 以上より $c = c^0 \in \boldsymbol{R}$ となり補題が証明された.

(2) スピノル群

さて Clifford 代数 $C(\boldsymbol{R}_{-}{}^{n})$ を用いて回転群 $SO(n)$ の被覆群 $Spin(n)$ を構成しよう. 目的は $Spin(n)$ の構成であるが直交群 $O(n)$ の被覆群 $Pin(n)$ も同じ方法でつくれるので併記しておくことにする.

定義 $Pin(n)=\{\alpha\in C(\boldsymbol{R}_{-}{}^{n})\,|\,\alpha=a_1\cdots a_m,\ a_i\in S^{n-1},\ m=1,2,\cdots\}$
を**ピノル群**という.

$$Spin(n)=\{\alpha\in C(\boldsymbol{R}_{-}{}^{n})\,|\,\alpha=a_1\cdots a_m,\ a_i\in S^{n-1},\ m=2,4,\cdots\}$$

を**スピノル群**という. $Spin(n)=Pin(n)\cap C^0(\boldsymbol{R}_{-}{}^{n})$ である.

定理 62. $Pin(n)$, $Spin(n)$ は ($C(\boldsymbol{R}_{-}{}^{n})$ の積およびその相対位相に関して) 位相群である.

証明 $\alpha,\beta\in Pin(n)$ ならば $\alpha\beta\in Pin(n)$ は明らかである. $C(\boldsymbol{R}_{-}{}^{n})$ の単位元 1 は $Pin(n)$ に属する. 実際, $a\in S^{n-1}$ に対して, $-a\in S^{n-1}$ であり, かつ $a(-a)=1$ (補題 174 (1)) となるから $1\in Pin(n)$ である (さらに $1\in Spin(n)$ である). また $\alpha=a_1\cdots a_m\in Pin(n)$ の逆元 α^{-1} は $\bar{\alpha}=(-1)^m a_m\cdots a_1$ である. 実際, $a\in S^{n-1}$ ならば $a\bar{a}=a(-a)=1$ であるから, これを繰返し用いて $\alpha\bar{\alpha}=a_1\cdots a_m\bar{a}_m\cdots\bar{a}_1=a_1\cdots a_{m-1}\bar{a}_{m-1}\cdots\bar{a}_1=\cdots=1$ となる. 以上で $Pin(n)$ が群をつくることがわかった. さらに写像 $\mu: Pin(n)\times Pin(n)\to Pin(n)$, $\mu(\alpha,\beta)=\alpha\beta$ および $\nu: Pin(n)\to Pin(n)$, $\nu(\alpha)=\alpha^{-1}=\bar{\alpha}$ は連続である (補題 175) から $Pin(n)$ は位相群である. $Spin(n)$ についても全く同様である.

補題 177. 元 $\alpha\in Pin(n)$ は $\alpha\bar{\alpha}=\bar{\alpha}\alpha=1$ であり, かつ任意の $x\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $\alpha x{}^t\alpha\in\boldsymbol{R}^n$ をみたす. したがって

$$(\alpha x{}^t\alpha,\ \alpha x{}^t\alpha)=(x,\ x),\qquad x\in\boldsymbol{R}^n$$

がなりたつ.

証明 $\alpha\bar{\alpha}=\bar{\alpha}\alpha=1$ はすでに定理 62 で示した. つぎに $a\in S^{n-1}$, $x\in\boldsymbol{R}^n$ ならば $ax{}^ta\in\boldsymbol{R}^n$ を示そう. 実際, x は $x=\lambda a+y$, $\lambda\in\boldsymbol{R}$, $(a,y)=0$ と表わされるので, $ax{}^ta=axa=a(\lambda a+y)a=(\lambda a^2+ay)a=(-\lambda-ya)a$ (補題 174) $=-\lambda a-ya^2=-\lambda a+y\in\boldsymbol{R}^n$ となる. さて $\alpha\in Pin(n)$ は $\alpha=a_1\cdots a_m$, $a_i\in S^{n-1}$ と表わされるので, 上述のことを繰返すと $\alpha x{}^t\alpha\in\boldsymbol{R}^n$ を得る. $\alpha x{}^t\alpha\in\boldsymbol{R}^n$ であるから, $\alpha^{\omega}x\bar{\alpha}=-(\alpha x{}^t\alpha)^{\omega}=\alpha x{}^t\alpha$ に注意すると $(\alpha x{}^t\alpha,\ \alpha x{}^t\alpha)=-\alpha x{}^t\alpha\alpha x{}^t\alpha$ (補題 174 (1)) $=-\alpha^{\omega}x\bar{\alpha}\alpha x{}^t\alpha=-\alpha^{\omega}xx{}^t\alpha=(x,x)\alpha^{\omega t}\alpha=(x,x)(\alpha\bar{\alpha})^{\omega}=(x,x)1^{\omega}=(x,x)$ を得る.

定理63.　$O(n)$, $SO(n)$ をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$ における直交群，回転群とする．写像

$$p : Pin(n) \longrightarrow O(n), \qquad p : Spin(n) \longrightarrow SO(n)$$

$$p(\alpha)(x) = \alpha x^t\alpha, \qquad x \in \boldsymbol{R}^n$$

は連続な全射準同型開写像であり，p の核は $S^0 = \{1, -1\}$ である．したがって $Pin(n)/S^0$ と $O(n)$; $Spin(n)/S^0$ と $SO(n)$ はそれぞれ位相群として同型である：

$$Pin(n)/S^0 \cong O(n), \qquad Spin(n)/S^0 \cong SO(n)$$

また $(Pin(n), p, O(n))$, $(Spin(n), p, SO(n))$ はいずれも被覆群である．

証明　(i)　$\alpha \in Pin(n)$ に対して，$(p(\alpha)x, p(\alpha)x) = (\alpha x^t\alpha,\ \alpha x^t\alpha) = (x, x)$, $x \in \boldsymbol{R}^n$（補題177）がなりたつから $p(\alpha) \in O(n)$ である（補題16)．

(ii)　$p : Pin(n) \to O(n)$ は準同型写像である．実際，$\alpha, \beta \in Pin(n)$, $x \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，$p(\alpha\beta)(x) = (\alpha\beta)x^t(\alpha\beta) = \alpha\beta x^t\beta^t\alpha = \alpha(\beta x^t\beta)^t\alpha = p(\alpha)(p(\beta)(x))$ となるから $p(\alpha\beta) = p(\alpha)p(\beta)$ である．

(iii)　p が連続であることは $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ における積をとる写像および写像 t が連続であることから明らかである（補題175)．

(iv)　p は全射である．そのために，まず $a \in S^{n-1}$ に対して $p(a)$ が a に関する反射写像（すなわち $p(a)a = -a$, $(x, a) = 0$, $x \in \boldsymbol{R}^n$ ならば $p(a)x = x$）であることを示そう．実際，$p(a)a = aa^ta = aaa = -a$, $p(a)x = ax^ta = axa = -aax = x$（補題174）である．さて $O(n)$ の任意の元 A は有限個の反射写像 D_i ($p(a_i) = D_i$, $a_i \in S^{n-1}$ とおく）の積で表わされる：$A = D_1\cdots D_m$（定理24）ので，$\alpha = a_1\cdots a_m$ とおくと $p(\alpha) = p(a_1\cdots a_m) = p(a_1)\cdots p(a_m) = D_1\cdots D_m = A$ となる．よって p は全射である．

(v)　$\mathrm{Ker}\, p = S^0$ である．実際，$\alpha \in Pin(n)$ が $\alpha \in \mathrm{Ker}\, p$ ならば $\alpha x^t\alpha = x$，すなわち（${}^t\alpha\alpha^\omega = 1$ より）$\alpha x = x\alpha^\omega$ がすべての $x \in \boldsymbol{R}^n$ に対してなりたつ．したがって $\alpha \in \boldsymbol{R}$ である（補題176)．さらに $\alpha^2 = \alpha\bar{\alpha} = 1$ であるから，$\alpha = 1$ または $\alpha = -1$ となる．よって $\mathrm{Ker}\, p = \{1, -1\} = S^0$ である．

(vi)　$Pin(n)$ は $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ の閉集合である．そのために $Pin(n)$ がつぎの群 $G = \{\alpha \in C(\boldsymbol{R}_-{}^n) \mid \bar{\alpha}\alpha = \alpha\bar{\alpha} = 1,\ \alpha\boldsymbol{R}^{n\,t}\alpha \subset \boldsymbol{R}^n,\ {}^t\alpha\boldsymbol{R}^n\alpha \subset \boldsymbol{R}^n\}$ と一致することを示そう．まず $Pin(n) \subset G$ は補題177である．写像 $p' : G \to O(n)$ を $p'(\alpha)(x) = \alpha x^t\alpha$ $(x \in \boldsymbol{R}^n)$ と定義すると，$p = p' | Pin(n)$ である．また $\mathrm{Ker}\, p' = S^0$ であることも (v) と同様にするとわかる．さて $\beta \in G$ に対して $p'(\beta) \in O(n)$ を考えると，p が全射であることより $p'(\beta) = p(\alpha)$ となる $\alpha \in Pin(n)$ が存在する．このとき $p'(\beta\alpha^{-1}) = 1$ となるから，$\beta\alpha^{-1} = 1$ また

は $\beta\alpha^{-1}=-1=a^2$ ($a\in S^{n-1}$) である．よって $\beta=\alpha\in Pin(n)$ または $\beta=\alpha aa\in Pin(n)$ となり $G\subset Pin(n)$ が示された．よって $Pin(n)=G$ である．G は $C(\boldsymbol{R}_{-}{}^{n})$ の閉集合である．実際，$\lim_{k\to\infty}\alpha_k=\alpha$ ($\alpha_k\in G$) とするとき，$\alpha\bar{\alpha}=\lim_{k\to\infty}\alpha_k\lim_{k\to\infty}\bar{\alpha}_k=\lim_{k\to\infty}\alpha_k\bar{\alpha}_k=1$, $\alpha x^t\alpha=(\lim_{k\to\infty}\alpha_k)x^t(\lim_{k\to\infty}\alpha_k)=\lim_{k\to\infty}(\alpha_k x^t\alpha_k)\in\boldsymbol{R}^n$ ($\boldsymbol{R}^n$ は $C(\boldsymbol{R}_{-}{}^{n})$ の閉集合であることに注意) 同様に $\bar{\alpha}\alpha=1$, ${}^t\alpha x\alpha\in\boldsymbol{R}^n$ となるからである．以上で $Pin(n)$ が $C(\boldsymbol{R}_{-}{}^{n})$ の閉集合であることがわかった．さて $C(\boldsymbol{R}_{-}{}^{n})\simeq\boldsymbol{R}^{2^n}$ は可算開基をもつ（例94）局所コンパクト Hausdorff 空間である（例95）から，その閉集合である $Pin(n)$ は可算開基をもつ（補題62）局所コンパクト Hausdorff 群である（補題65 (1)）．ゆえに準同型定理（命題81）より p は位相群としての同型 $Pin(n)/S^0\cong O(n)$ を誘導する．最後に $(Pin(n), p, O(n))$ が被覆群であることは命題162 である．

$Spin(n)$ についての証明も $Pin(n)$ のときと全く同じであるが2, 3注意しておこう．まず $\alpha\in Spin(n)$ に対して $p(\alpha)\in SO(n)$ である．実際，$\alpha\in Spin(n)$ は偶数個の $a_i\in S^{n-1}$ を用いて $\alpha=a_1\cdots a_{2m}$ と表わされ，かつ $\det(p(a_i))=-1$ である（補題103 (2)）から $\det(p(\alpha))=\det(p(a_1\cdots a_{2m}))=\det(p(a_1))\cdots\det(p(a_{2m}))=(-1)^{2m}=1$ となる．よって $p(\alpha)\in SO(n)$ である．$p: Spin(n)\to SO(n)$ が全射であることは $SO(n)$ の各元が偶数個の反射写像の積で表わされる（定理24）ことを用いるとよい．$Spin(n)$ が $C(\boldsymbol{R}_{-}{}^{n})$ の閉集合であることは $Spin(n)=Pin(n)\cap C^0(\boldsymbol{R}_{-}{}^{n})$ より明らかである．よって $Pin(n)$ と同様にすると，$p: Spin(n)\to SO(n)$ に対して準同型定理（命題81）を用いることができる．よって定理が証明された．

定理64. つぎの群は位相群として同型である．

(1) $$Spin(1)\cong S^0$$

(2) $$Spin(2)\cong S^1$$

証明 (1) $C(\boldsymbol{R}_{-}{}^{1})$ ($1, e_1$ がその基であった) において $S^0\subset\boldsymbol{R}^1\subset C(\boldsymbol{R}_{-}{}^{1})$ の S^0 は $S^0=\{e_1, -e_1\}$ の2つの元からなりたっている．この2つの元 $e_1, -e_1$ の偶数個の積からできる $C(\boldsymbol{R}_{-}{}^{1})$ の元は1と -1 のみである．この $\{1, -1\}$ を再び S^0 で表わすことにすると $Spin(1)\cong S^0$ である．

(2) $C(\boldsymbol{R}_{-}{}^{2})$ ($1, e_1, e_2, e_1e_2$ がその基であった) において，$S^1\subset\boldsymbol{R}^2\subset C(\boldsymbol{R}_{-}{}^{2})$ の S^1 は $S^1=\{e_1\cos\theta+e_2\sin\theta\,|\,\theta\in\boldsymbol{R}\}$ である．S^1 の2つの元 $e_1\cos\theta+e_2\sin\theta$, $e_1\cos\varphi+e_2\sin\varphi$ の積は

$$(e_1\cos\theta+e_2\sin\theta)(e_1\cos\varphi+e_2\sin\varphi)$$

$= (-\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + e_1e_2(\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi)$

$= -\cos(\theta-\varphi) + e_1e_2\sin(\varphi-\theta) = \cos(\pi-(\varphi-\theta)) + e_1e_2\sin(\pi-(\varphi-\theta))$

の形をしており，またこのような形の元の積もまたこのような形であることがわかる．このことから

$$Spin(2) = \{\cos\theta + e_1e_2\sin\theta \,|\, \theta\in \boldsymbol{R}\}$$

であることがわかる．さて写像 $f: Spin(2) \to S^1 = S_C{}^0$ を

$$f(\cos\theta + e_1e_2\sin\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

と定義すると（$(e_1e_2)^2 = -1$ に注意（例 164 参照）），f は位相群としての同型を与えている．よって $Spin(2) \cong S^1$ である．

例 167.　$Pin(1)$ は $\boldsymbol{Z}_4 = \boldsymbol{Z}/4\boldsymbol{Z}$ と群として同型である：

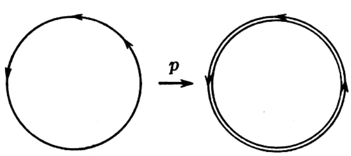
$$Pin(1) \cong \boldsymbol{Z}_4$$

実際，$Pin(1)$ は $1, -1, e_1, -e_1$ の 4 つの元からなるので，写像 $f: Pin(1) \to \boldsymbol{Z}_4$ を $f(1) = [0], f(e_1) = [1], f(-1) = [2], f(-e_1) = [3]$ と定義すると，f は群としての同型を与えている．

例 168.　$\boldsymbol{R}^2$ における回転群 $SO(2)$ を $\boldsymbol{R}^2$ の基 e_1, e_2 を用いて行列で表示するとき，定理 63 における射影 $p: Spin(2) \to SO(2)$ は

$$p(\cos\theta + e_1e_2\sin\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

で与えられる．実際，



$p(\cos\theta + e_1e_2\sin\theta)(e_1)$

$= (\cos\theta + e_1e_2\sin\theta)e_1{}^t(\cos\theta + e_1e_2\sin\theta)$

$= (\cos\theta + e_1e_2\sin\theta)e_1(\cos\theta + e_2e_1\sin\theta)$

$= (e_1\cos\theta + e_2\sin\theta)(\cos\theta + e_2e_1\sin\theta)$

$= e_1(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + e_2(2\sin\theta\cos\theta)$

$= e_1\cos 2\theta + e_2\sin 2\theta$

同様に $p(\cos\theta + e_1e_2\sin\theta)(e_2) = -e_1\sin 2\theta + e_2\cos 2\theta$ となるからである．（したがって点 α が $Spin(2)$ の上を 1 周するとき点 $p(\alpha)$ は $SO(2)$ 上を 2 周する．$Spin(2)$ も $SO(2)$ も S^1 と位相群として同型であるが，$Spin(2)$ は完全円 S^1 であり，一方 $SO(2)$ は上半円の両端の 2 点を同一視してできた円 S^1（例 14, 16）であるという感じがする）．

定理 65.　（1）　$Spin(n)$ $(n \geqq 1)$ はコンパクト群である．

（2） $Spin(n)$ $(n \geqq 2)$ は弧状連結群である.

（3） $Spin(n)$ $(n \geqq 3)$ は単連結（コンパクト）群である. したがって $Spin(n)$ は $SO(n)$ $(n \geqq 3)$ の普遍被覆群である.

証明 （1） $Spin(n)/S^0 \cong SO(n)$（定理 63）において S^0, $SO(n)$ はコンパクト群である（定理 7）から $Spin(n)$ もまたコンパクト群である（命題 83).

（2） $(Spin(n), p, SO(n))$ は被覆群である（定理 63）から, $(Spin(n), p, SO(n))$ はファイバー空間であり（補題 149), したがって Serre のファイバー空間である（命題 133). ゆえに $Spin(n)$ が弧状連結であることを示すには（$SO(n)$ が弧状連結である（定理 20）ことに注意すると）S^0 の 2 元 1, -1 が $Spin(n)$ の道 u で結べることをいうとよい（補題 135). さて写像 $u: I \to Spin(n)$ を

$$u(t) = \cos \pi t + e_1 e_2 \sin \pi t$$

と定義する. $u(t) = \cos \pi t + e_1 e_2 \sin \pi t = \left(e_1 \cos \frac{\pi t}{2} + e_2 \sin \frac{\pi t}{2}\right)\left(-e_1 \cos \frac{\pi t}{2} + e_2 \sin \frac{\pi t}{2}\right)$ であるから u は確かに $Spin(n)$ の道である. そして $u(0) = 1$, $u(1) = -1$ であるから, u は 1 と -1 を結ぶ道である. よって $Spin(n)$ $(n \geqq 2)$ は弧状連結である.

（3） ファイバー空間 $Spin(n)/S^0 = SO(n)$ に対してホモトピー完全系列（命題 173）を用いると, 完全系列

$$\pi_1(S^0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(Spin(n)) \xrightarrow{p_*} \pi_1(SO(n)) \xrightarrow{\Delta} \pi_0(S^0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(Spin(n))$$

すなわち

$$0 \longrightarrow \pi_1(Spin(n)) \longrightarrow \underset{(n \geqq 3\ (\text{定理 } 59))}{\boldsymbol{Z}_2} \longrightarrow \boldsymbol{Z}_2 \longrightarrow \underset{(\text{上記の } (2))}{0}$$

を得る. これより $\pi_1(Spin(n)) = 0$ がわかる（例 159）から $Spin(n)$ $(n \geqq 3)$ は単連結である.

最後に $Pin(n)$ $(n \geqq 2)$ の単位元 1 を含む弧状連結成分が $Spin(n)$ であることに注意して本稿を終る.

付　　録

(1) 体における公式

Cayley 数体 $\mathfrak{C}$ における公式 **1 − 11** を $|xy|=|x||y|$ より導こう.

1. $|ax|=|a||x|$ を2乗すると $(ax, ax)=(a, a)(x, x)$ となる. x の代りに $x+y$ とおくと

$$(ax+ay, ax+ay)=(a, a)(x+y, x+y),$$

$$(ax, ax)+2(ax, ay)+(ay, ay)=(a, a)((x, x)+2(x, y)+(y, y))$$

これより

$$(ax, ay)=(a, a)(x, y)$$

を得る. $(xa, ya)=(x, y)(a, a)$ も同様に証明できる.

2. 公式 **1** において a の代りに $a+b$ とおくと

$$(ax+bx, ay+by)=(a+b, a+b)(x, y)$$

$$(ax, ay)+(ax, by)+(bx, ay)+(bx, by)=((a, a)+2(a, b)+(b, b))(x, y)$$

これに再び公式 **1** を用いると

$$(ax, by)+(bx, ay)=2(a, b)(x, y)$$

を得る.

3. $(ax, y)=(x, \bar{a}y)$ を示そう. $a=1$ のときには明らかになりたつ. 公式 **2** において $a=e_i$ $(i\neq 0)$, $b=1$ とおくと

$$(e_ix, y)+(x, e_iy)=2(e_i, 1)(x, y)=0$$

$\bar{e}_i=-e_i$ であるからこれより $(e_ix, y)=(x, \bar{e}_iy)$ を得る. さて任意の $a\in\mathfrak{C}$ は $a=a_0+\sum_{i=1}^{7}a_ie_i$ $(a_0, a_i\in \boldsymbol{R})$ と表わされ各 $1, e_i$ に対して $(ax, y)=(x, \bar{a}y)$ がなりたつから a についてもなりたつ. 他の式も同様に証明される.

4. $\bar{\bar{x}}=x$, $\overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y}$ は明らかである. 一般に $(x, y)=(\bar{x}, \bar{y})$ がなりたつことに注意しておこう. さて

$$(\overline{xy}, z)=(xy, \bar{z})\underset{\mathbf{3.}}{=}(y, \bar{x}\bar{z})\underset{\mathbf{3.}}{=}(yz, \bar{x})\underset{\mathbf{3.}}{=}(z, \bar{y}\bar{x})=(\bar{y}\bar{x}, z)$$

が任意の $z\in\mathfrak{C}$ に対してなりたつから $\overline{xy}=\bar{y}\bar{x}$ を得る.

5. 公式 **3** より $(x, y)=(1, \bar{x}y)$ であり, 一方 $(x, y)=(y, x)=(1, \bar{y}x)$ である. この2つの式を加えると

$$2(x,\ y)=(1,\ \bar{x}y+\bar{y}x)$$

を得る．しかるに $\bar{x}y+\bar{y}x\in \boldsymbol{R}$ である $(\overline{\bar{x}y+\bar{y}x}=\bar{y}x+\bar{x}y)$ から上式の右辺は $\bar{x}y+\bar{y}x$ である．したがって

$$(x,\ y)=\frac{1}{2}(\bar{x}y+\bar{y}x)$$

を得る．また $(x,\ y)=(\bar{x},\ \bar{y})=\dfrac{1}{2}(x\bar{y}+y\bar{x})$ である． $x\bar{x}=\bar{x}x=|x|^2$ はいま求めた式において $x=y$ とおくとよい．

6.　公式 **1**　$(ax,\ ay)=(a,\ a)(x,\ y)$ において公式 **3** を用いると

$$(\bar{a}(ax),\ y)=((\bar{a}a)x,\ y)$$

を得る．この式が任意の $y\in \mathfrak{C}$ に対してなりたつから

$$\bar{a}(ax)=(\bar{a}a)x$$

を得る．$(xa)\bar{a}=x(a\bar{a})$ も公式 **1** $(xa,\ ya)=(x,\ y)(a,\ a)$ から同様にして導かれる．さらに $a=2\mathrm{Re}\,a-\bar{a}$ を用いるといま得た２つの式より $a(ax)=(aa)x,\ (xa)a=x(aa)$ を得る．残りの２つの式 $a(x\bar{a})=(ax)\bar{a},\ a(xa)=(ax)a$ は **8** において証明する．

7.　公式 **2**　$(ax,\ by)+(bx,\ ay)=2(a,\ b)(x,\ y)$ において公式 **3** を用いると

$$(\bar{b}(ax),\ y)+(\bar{a}(bx),\ y)=(2(a,\ b)x,\ y)$$

となる．この式が任意の $y\in \mathfrak{C}$ に対してなりたつから

$$\bar{b}(ax)+\bar{a}(bx)=2(a,\ b)x$$

を得る．$(xa)\bar{b}+(xb)\bar{a}=2(a,\ b)x$ も同様にして証明される．

8.　公式 **7**　$a(ax)=(aa)x$ において a の代りに $a+b$ とおくと

$$(a+b)(ax+bx)=((a+b)(a+b))x$$

$$a(ax)+a(bx)+b(ax)+b(bx)=(aa)x+(ab)x+(ba)x+(bb)x$$

再び $a(ax)=(aa)x$ を用いると，これより

$$a(bx)+b(ax)=(ab)x+(ba)x$$

を得る．他の式も $(xa)a=x(aa)$ において a の代りに $a+b$ とおくと得られる．ここで **6** の未証明の公式 $a(xa)=(ax)a$ を証明しよう．いま証明した公式 $a(bx)+b(ax)=(ab)x+(ba)x$ において x の代りに a, b の代りに x とおくと

$$a(xa)+x(aa)=(ax)a+(xa)a$$

となるが **6** の公式 $x(aa)=(xa)a$ を用いると

$$a(xa)=(ax)a$$

を得る．$a(xa)=(ax)a$ において $a=2\mathrm{Re}\,a-\bar{a}$ を代入すると $a(x\bar{a})=(ax)\bar{a}$ を得る．

9. 公式8の初めの式において b の代りに x, x の代りに y, もう1つの式において b の代りに y とおくと

$$\begin{cases} a(xy)+x(ay)=(ax)y+(xa)y \\ (xy)a+(xa)y=x(ya)+x(ay) \end{cases}$$

となる．この2つの式を加えると

$$a(xy)+(xy)a=(ax)y+x(ya)$$

を得る．他の式は公式6 $x(ax)=(xa)x$ において x の代りに $x+y$ とおくと得られる．

10. 公式9の初めの式において x の代りに ax, また同じ式において y の代りに ya とおくと

$$\begin{cases} (a^2x)y+(ax)(ya)=a((ax)y)+((ax)y)a \\ (ax)(ya)+x(ya^2)=a(x(ya))+(x(ya))a \end{cases}$$

となる．この2つの式を加えると

$$\begin{aligned} &(a^2x)y+2(ax)(ya)+x(ya^2) \\ &\quad =a((ax)y+x(ya))+((ax)y+x(ya))a \\ &\quad =a(a(xy)+(xy)a)+(a(xy)+(xy)a)a \qquad (\text{公式 }9) \\ &\quad =a^2(xy)+2a(xy)a+(xy)a^2 \qquad (\text{公式 }6\text{ 参照}) \end{aligned}$$

となるが再び公式9を用いると

$$(ax)(ya)=a(xy)a$$

を得る．

11.1 $(1, a_i)=0$ より $\bar{a}_i=-a_i$ $(i=1,\cdots,7)$ となるから公式7を用いると

$$a_i(a_jx)+a_j(a_ix)=-\bar{a}_i(a_jx)-\bar{a}_j(a_ix)=-2(a_i, a_j)x=0$$

を得る．

11.2 公式6を用いて $a_i(a_ix)=(a_ia_i)x=-(a_i\bar{a}_i)x=-x$.

11.3 公式11.1において $x=a_k$ とおくとよい．

(2) Newton の公式

補題 178. $\boldsymbol{Z}$ を整数環とし，$x_1,\cdots,x_n$ を変数とする多項式環 $\boldsymbol{Z}[x_1,\cdots,x_n]$ において，$x_1,\cdots,x_i$ の基本対称式を $s_1,\cdots,s_n$ とする：

$$s_1=x_1+\cdots+x_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_k = \sum_{i_1<\cdots<i_k} x_{i_1}\cdots x_{i_k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n = x_1\cdots x_n$$

また $x_1, \cdots, x_n$ の冪(べき)和を $c_1, \cdots, c_n$

$$c_1 = x_1 + \cdots + x_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_k = x_1{}^k + \cdots + x_n{}^k$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n = x_1{}^n + \cdots + x_n{}^n$$

とおくと，$s_1, \cdots, s_n$ と $c_1, \cdots, c_n$ の間にはつぎの関係がある．

$$c_1 - s_1 = 0$$

$$c_2 - c_1 s_1 + 2s_2 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n - c_{n-1}s_1 + c_{n-2}s_2 - \cdots + (-1)^n n s_n = 0$$

(これを **Newton の公式** という).

証明

$$f(t) = (t-x_1)(t-x_2)\cdots(t-x_n)$$
$$= t^n - s_1 t^{n-1} + s_2 t^{n-2} - \cdots + (-1)^n s_n$$

とおくと

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{t-x_1} + \frac{1}{t-x_2} + \cdots + \frac{1}{t-x_n}$$

となる ($f'(t)$ は t による $f(t)$ の導関数). しかるに

$$\frac{1}{t-x_i} = \frac{1}{t} + \frac{x_i}{t^2} + \frac{x_i{}^2}{t^3} + \cdots + \frac{x_i{}^n}{t^{n+1}} + \frac{x_i{}^{n+1}}{t^{n+1}(t-x_i)}$$

であるから

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{n}{t} + \frac{c_1}{t^2} + \frac{c_2}{t^3} + \cdots + \frac{c_n}{t^{n+1}} + \frac{g(t)}{t^{n+1}f(t)}$$

($g(t)$ は t の $n-1$ 次の整式) となる．したがって

$$t^{n+1}(nt^{n-1} - (n-1)s_1 t^{n-2} + (n-2)s_2 t^{n-3} - \cdots + (-1)^{n-1}s_{n-1})$$
$$= (nt^n + c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + \cdots + c_n) \times$$
$$(t^n - s_1 t^{n-1} + s_2 t^{n-2} + \cdots + (-1)^n s_n) + g(t)$$

となる．t の冪の係数を比較すると

$$t^{2n-1}: -(n-1)s_1 = c_1 - ns_1$$

$$t^{2n-2}: \quad (n-2)s_2 = c_2 - c_1s_1 + ns_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t^n \quad : \qquad 0 = c_n - c_{n-1}s_1 + c_{n-2}s_2 + \cdots + (-1)^n ns_n = 0$$

を得るが，これから求める式が得られる．

Newton の公式から，$x_1, \cdots, x_n$ の基本対称式 $s_1, \cdots, s_n$ は冪和 $c_1, \cdots, c_n$ の整式で表わされることがわかる．したがって

$$\sum_{i=1}^n x_i{}^k = \sum_{i=1}^n y_i{}^k, \qquad k = 1, \cdots, n$$

ならば $x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n$ の基本対称式がそれぞれ等しくなり，そしてこのことから

$$\prod_{i=1}^n (t - x_i) = \prod_{i=1}^n (t - y_i)$$

が t について恒等的になりたつことがわかる．ゆえに $\{x_1, \cdots, x_n\}$ と $\{y_1, \cdots, y_n\}$ とは順序を除いて相等しくなる．以上のことをつぎの補題にまとめておこう．

補題 179. $x_1, \cdots, x_n$ に関する連立方程式

$$\sum_{i=1}^n x_i{}^k = a_k \qquad k = 1, \cdots, n$$

がある可換体 K ($a_k \in K$) において解 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ をもてば $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は順序を除いて1意に定まる．

(3) $\boldsymbol{H}$-右加群と命題25(3)の証明

V を $\boldsymbol{H}$-右加群とする．複素数体 $\boldsymbol{C}$ は4元数体 $\boldsymbol{H}$ の部分体 $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{H}$ であるから (V のスカラー乗積を $\boldsymbol{C}$ に限ることにより) V は $\boldsymbol{C}$-右加群の構造をもつ．$\boldsymbol{H}$-右加群 V を $\boldsymbol{C}$-右加群とみなすとき，V を V_C で表わすことにする．V が n 次元 $\boldsymbol{H}$-右群であれば V_C は $2n$ 次元 $\boldsymbol{C}$-右加群である．実際 $u_1, \cdots, u_n$ を V の基とするとき $u_1, u_1j, \cdots, u_n, u_nj$ は V_C の基となる，

V を内積 (x, y) をもつ $\boldsymbol{H}$-右加群とする，このとき $x, y \in V$ に対し

$$(x, y)_C = \mathrm{comp}(x, y)$$

($q \in \boldsymbol{H}$ を $q = \lambda + j\mu$, $\lambda, \mu \in \boldsymbol{C}$ と表わしたとき $\lambda = \mathrm{comp}\, q$ と表わすことにした) とおくと V_C はこの内積 $(\ ,\ )_C$ に関して内積をもつ $\boldsymbol{C}$-右加群になる．

V を $\boldsymbol{H}$-右加群とし，$f: V \to V$ を $\boldsymbol{H}$-準同型写像とする，このとき f は (スカラーを $\boldsymbol{C}$ に限ることにより) $\boldsymbol{C}$-準同型写像 $f: V_C \to V_C$ とみなすことができる．$\boldsymbol{H}$-準同型

写像 $f: V \to V$ を C-準同型写像とみなすとき f を f_C で表わすことにする．C-準同型写像 $g: V_C \to V_C$ に対して写像 $g^j: V_C \to V_C$ を

$$g^j(x) = -g(xj)j$$

と定義すると g^j は C-準同型写像になる．さて H-準同型写像 $f: V \to V$ は $(f_C)^j = f_C$ をみたしている．逆に C-準同型写像 $g: V_C \to V_C$ が $g^j = g$ をみたすならば $f_C = g$ となる H-準同型写像 $f: V \to V$ がただ1つ存在する．

V を内積をもつ H-右加群とする．$Sp(V)$ を V におけるシンプレティック群とし $U(V_C)$ を V_C におけるユニタリ群とするとき $f \in Sp(V)$ ならば明らかに $f_C \in U(V_C)$ である．したがって $f \in Sp(V)$ に $f_C \in U(V_C)$ に対応させることにより $Sp(V)$ は $U(V_C)$ の部分群 $\{g \in U(V_C) \mid g^j = g\}$ と群として同型である：

$$Sp(V) \cong \{g \in U(V_C) \mid g^j = g\}$$

以上で述べたことは H の代りに C, C の代りに R としても同じことがなりたつ．そして内積をもつ C-加群 V に対して群としての同型

$$U(V) \cong \{g \in O(V_R) \mid g^i = g\}$$

を得る．

補題 180. $K = R, C, H$ とし，V を内積をもつ有限次元 K-右加群とする．W を V の部分 K-右加群とし $W^\perp = \{x \in V \mid (x, w) = 0, w \in W\}$ とおくと $W^\perp$ はまた V の部分 K-右加群であり

$$V = W \oplus W^\perp \qquad (K\text{-右加群の直和})$$

となる．

証明　W 自身内積をもつ有限次元 K-右加群であるから，W に正規直交基 $e_1, \cdots, e_m$ をとる（補題 14)．元 $x \in V$ に対して元 $w = \sum_{i=1}^{m} e_i(e_i, x)$ をつくり x を

$$x = w + (x - w)$$

と表わすと $w \in W$, $x - w \in W^\perp$ である．実際，$(x - w, e_j) = (x, e_j) - (w, e_j) = (x, e_j) - \sum_{i=1}^{m} \overline{(e_i, x)}(e_i, e_j) = (x, e_j) - \overline{(e_j, x)} = (x, e_j) - (x, e_j) = 0$ であるから $x - w \in W^\perp$ である．なお明らかに $W \cap W^\perp = \{0\}$ であるから V は W と $W^\perp$ の K-右加群の直和に表わされた．

この補題を用いてつぎの命題を証明しよう．

命題 181. V を内積をもつ n 次元 H-右加群とし，$f \in Sp(V)$ とする．このとき V の正規直交基 $u_1, \cdots, u_n$ を

$$f(u_i) = u_i\lambda_i, \quad \lambda_i \in \boldsymbol{C}, |\lambda_i| = 1, \quad i = 1, \cdots, n$$

をみたすように選ぶことができる．なおこの $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は順序と複素数の共役を除いて f に対して（正規直交基 $u_1, \cdots, u_n$ のとり方によらず）1意に定まる．

証明 V の次元に関する帰納法によって証明しよう． 1次元の $\boldsymbol{H}$-右加群に対して命題は明らかになりたっている． さて $f \in Sp(V)$ に対して $f_C \in U(V_C)$ を考え，f_C の固有値の1つを λ_1 ($\lambda_1 \in \boldsymbol{C}, |\lambda_1| = 1$) とし，$\lambda_1$ に属する固有ベクトルを u_1 とすると $f_C(u_1) = u_1\lambda_1$ である．すなわち

$$f(u_1) = u_1\lambda_1 \qquad (\|u_1\| = 1 \text{ とおいてよい})$$

である． W を u_1 より生成される V の部分 $\boldsymbol{H}$-右加群：$W = \{u_1\lambda \mid \lambda \in \boldsymbol{H}\}$ とすると補題180より

$$V = W \oplus W^\perp$$

となる． このとき $f(W^\perp) \subset W^\perp$ である． 実際， $y \in W^\perp$ に対して $(u_1, f(y)) = \lambda_1 (u_1\lambda_1, f(y)) = \lambda_1(f(u_1), f(y)) = \lambda_1(u_1, y) = 0$ であるから $f(y) \in W^\perp$ である． ゆえに f は写像 $f: W^\perp \to W^\perp$ を誘導する．すなわち $f|W^\perp \subset Sp(W^\perp)$ である． しかるに $W^\perp$ は $n-1$ 次元であるから帰納法の仮定より $W^\perp$ の正規直交基 $u_2, \cdots, u_n$ を

$$f(u_i) = u_i\lambda_i, \quad \lambda_i \in \boldsymbol{C}, \ |\lambda_i| = 1, \quad i = 2, \cdots, n$$

をみたすように選ぶことができる．このとき $u_1, \cdots, u_n$ は求める V の正規直交基である．つぎに $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ が順序と複素数の共役を除いて f に対して1意に定まることを示そう．そのためには $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \bar{\lambda}_1, \cdots, \bar{\lambda}_n$ が f_C の固有値であることを示すとよい． さて $f_C(u_i) = f(u_i) = u_i\lambda_i$ であるから $f_C(u_ij) = f(u_ij) = f(u_i)j = u_i\lambda_ij = (u_ij)\bar{\lambda}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ である．しかるに $u_1, \cdots, u_n, u_1j, \cdots, u_nj$ は V_C の基であるから上記のことは f_C の固有値が $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \bar{\lambda}_1, \cdots, \bar{\lambda}_n$ であることを示している．

さて命題25 (3) はこの命題181と本質的に同じ内容である． V の2つの正規直交基 $e_1, \cdots, e_n$; $u_1, \cdots, u_n$ に対して $g(e_i) = u_i$, $i = 1, \cdots, n$ をみたす $\boldsymbol{H}$-準同型写像 g は $g \in Sp(V)$ であることに注意して V の代りに $\boldsymbol{H}^n$, f の代りに $A \in Sp(n)$, g の代りに $B \in Sp(n)$ とするとよい．

（4） 例外群 F_4 と G_2

われわれは $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}, \mathfrak{C}$ の4種類の体を知っている．そして古典群 $G(n, K)$ ($O(n), U(n), Sp(n)$) を

$$G(n, K) = \{A \in M(n, K) \mid A^*A = E\}$$

と定義した．$K=\mathfrak{C}$ のときにはたとえ $\{A\in M(3,\mathfrak{C})\,|\,A^*A=AA^*=E\}$ を考えても群とはならない．それは $\mathfrak{C}$ が結合法則をみたさないので $A(BC)=(AB)C$ とならないからである．そこで Cayley 数体 $\mathfrak{C}$ にも話が通用するように古典群 $G(n,K)$ を違った立場から眺めてみよう．(実は $G(n,K)$ 自身ではなくて $Aut(\mathfrak{J}(n,K))$ を考えるのであるが)，簡単のため以下 $n=3$ として述べておく．

X を Hermite 行列とするとき，$A\in G(3,K)$ に対して AXA^* はまた Hermite 行列であることに注目すると，$A\in G(3,K)$ は $\boldsymbol{R}$-準同型写像 $\alpha:\mathfrak{J}(3,K)\to\mathfrak{J}(3,K)$

$$\alpha X=AXA^* \qquad \text{(i)}$$

を誘導する．

X, Y を Hermite 行列とするとき，$XY+YX$ はまた Hermite 行列であるから，$\mathfrak{J}(3,K)$ に積 $X\circ Y$ を

$$X\circ Y=\frac{1}{2}(XY+YX)$$

で定義する．この積を X と Y の **Jordan 積**という．このとき $\mathfrak{J}(3,K)$ は可換な（結合法則をみたさない）$\boldsymbol{R}$-多元環† となる．この $\mathfrak{J}(3,K)$ を **Jordan 代数**† という．さて Jordan 代数 $\mathfrak{J}(3,K)$ の自己同型群を $Aut(\mathfrak{J}(3,K))$ で表わすことにする．すなわち $\alpha\in Aut(\mathfrak{J}(n,K))$ とは写像 $\alpha:\mathfrak{J}(3,K)\to\mathfrak{J}(3,K)$ であって

$$\begin{cases}\alpha(X+Y)=\alpha(X)+\alpha(Y) & \\ \alpha(\lambda X)=\lambda\alpha(X) & \lambda\in\boldsymbol{R}\\ \alpha(X\circ Y)=\alpha X\circ\alpha Y & \\ \alpha\text{ は単射（したがって全射である）} & \end{cases}$$

をみたすことである．(i) で定義した α は明らかに上の条件をみたしているので写像

$$\varphi: G(3,K)\longrightarrow Aut(\mathfrak{J}(3,K))$$
$$\varphi(A)=\alpha,\qquad \alpha X=AXA^*$$

が定義される．φ は明らかに群の準同型写像である．φ の核は $G(3,K)$ の中心に一致

† J を集合とし，K を可換体とする．J の任意の2つの元 x, y および K の元 λ に対して算法 $x+y\in J$, $xy\in J$, $\lambda x=x\lambda\in J$ が定義されていて，$x+y$, λx に関して J は K-加群をなし，さらに

(1) $xy=yx$
(2) $x(y+z)=xy+xz$
(3) $\lambda(xy)=(\lambda x)y=x(\lambda y)$
(4) $x^2(yx)=(x^2y)x$

をみたすとき J を K-**Jordan 代数**という．

している．すなわち $K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{H}$ のとき $\mathrm{Ker}\,\varphi=\{\pm E\}$, $K=\boldsymbol{C}$ のとき $\mathrm{Ker}\,\varphi=\{\lambda E \mid \lambda \in Sc^0\}$ である．つぎに $\mathrm{Im}\,\varphi$ を調べると $G(3, K)$ と $Aut(\mathfrak{J}(3, K))$ の関係が大体明らかにされるが，それはつぎの命題がその解答を与えている．

命題 182. （1） $\alpha \in Aut(\mathfrak{J}(3, \boldsymbol{R}))$ に対して，ある $A \in O(3)$ が存在して

$$\alpha X = AX{}^tA, \qquad X \in \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{R})$$

がなりたつ．

（2） $\alpha \in Aut(\mathfrak{J}(3, \boldsymbol{C}))$ に対して，ある $A \in U(3)$ が存在して

$$\alpha X = AXA^* \quad \text{または} \quad \alpha(X) = A\overline{X}A^*, \qquad X \in \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{C})$$

のいずれかがなりたつ．

（3） $\alpha \in Aut(\mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}))$ に対して，ある $A \in Sp(3)$ が存在して

$$\alpha X = AXA^*, \qquad X \in \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H})$$

がなりたつ．

略証 E_i, $i=1, 2, 3$ を補題 26 の証明において用いた行列とする．$E_i \circ E_i = E_i$, $\mathrm{tr}(E_i)=1$ に α を施すと $\alpha E_i \circ \alpha E_i = \alpha E_i$, $\mathrm{tr}(\alpha E_i)=1$ となる．したがって $\alpha E_1, \alpha E_2, \alpha E_3$ は射影平面 $KP(2)$ の点である． この $\alpha E_1, \alpha E_2, \alpha E_3$ のそれぞれから 0 でない縦ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$（ただし長さで割って $\|\boldsymbol{a}_1\|=\|\boldsymbol{a}_2\|=\|\boldsymbol{a}_3\|=1$ にしておく）を 1 本づつ選び出し行列 $U=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ をつくると $U \in G(3, K)$ であって

$$UE_iU^* = \alpha E_i, \qquad i=1, 2, 3$$

をみたしている．したがって命題を証明するには α が

$$\alpha E_i = E_i, \qquad i=1, 2, 3$$

をみたしているものと仮定してよい．

$$F_1{}^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & \overline{x} & 0 \end{pmatrix}, \ F_2{}^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \overline{x} \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ F_3{}^x = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ \overline{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$E_i \circ F_i{}^x = 0, \qquad 2E_i \circ F_j{}^x = F_j{}^x \qquad (i \neq j) \tag{ii}$$

$$F_i{}^x \circ F_i{}^y = (x, y)(E_{i+1}+E_{i+2}) \tag{iii}$$

$$F_i{}^{2x} \circ F_{i+1}{}^{2y} = F_{i+2}{}^{2\overline{xy}} \tag{iv}$$

をみたす（添数は mod 3 で考える）．この両辺に α を施すとまず (ii) より $\alpha F_i{}^x = F_i{}^{\alpha_i(x)}$ の形であることがわかる．さらに (iii) より $\alpha_i \in O(K)$ がわかり，また (iv) より

$$\alpha_1(x)\alpha_2(y) = \overline{\alpha_3(\overline{xy})}$$

をみたすことがわかる．したがってつぎの補題が必要となる．

補題 183. $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in O(K)$ が

$$\alpha_1(x)\alpha_2(y) = \overline{\alpha_3(\overline{xy})}, \qquad x, y \in K$$

をみたすならば，

（1） $K = \boldsymbol{R}$ のとき，$a, b \in S^0$ が存在して

$$\alpha_1(x) = ax,\ \alpha_2(x) = xb,\ \alpha_3(x) = bxa, \qquad x \in \boldsymbol{R}$$

（2） $K = \boldsymbol{C}$ のとき，$a, b \in S_C{}^0$ が存在して

$$\alpha_1(x) = ax,\ \alpha_2(x) = xb,\ \alpha_3(x) = \bar{b}x\bar{a}, \qquad x \in \boldsymbol{C}$$

または

$$\alpha_1(x) = a\bar{x},\ \alpha_2(x) = \bar{x}b,\ \alpha_3(x) = \bar{b}\bar{x}\bar{a}, \qquad x \in \boldsymbol{C}$$

（3） $K = \boldsymbol{H}$ のとき，$a, b, c \in S_H{}^0$ が存在して

$$\alpha_1(x) = acx\bar{c},\ \alpha_2(x) = cx\bar{c}b,\ \alpha_3(x) = \bar{b}cx\bar{c}\bar{a}, \qquad x \in \boldsymbol{H}$$

となる．

さて $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ であるにしたがって $A = \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \bar{b} & & \\ & a & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \bar{b}c & & \\ & ac & \\ & & c \end{pmatrix}$ とおくと $\alpha X = AXA^*$ $(\alpha X = A\overline{X}A^*)$ となる．よって命題が証明された．

以上のことを考慮にいれて，さて本題の群 F_4 を定義しよう．

$$\mathfrak{J}(3, \mathfrak{C}) = \{X \in M(3, \mathfrak{C}) \mid X^* = X\}$$

とおくと，$\mathfrak{J}(3, \mathfrak{C})$ は 27 次元 $\boldsymbol{R}$ - 加群になる．さらに $X, Y \in \mathfrak{J}(3, \mathfrak{C})$ に対して

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

で積を定義すると $\mathfrak{J}(3, \mathfrak{C})$ は可換な（結合法則 $X \circ (Y \circ Z) = (X \circ Y) \circ Z$ は成立しない）$\boldsymbol{R}$ - 多元環になる（247 頁欄外参照）．そして群 F_4 を

$$F_4 = Aut(\mathfrak{J}(3, \mathfrak{C}))$$

で定義する．F_4 の性質を調べるにはつぎの命題が基本的である（命題 23 参照）．

命題 184. $X \in \mathfrak{J}(3, \mathfrak{C})$ はある $\alpha \in F_4$ により

$$\alpha X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \boldsymbol{R}$$

に変形できる．ここに $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は順序を除いて（α のとり方に関係せず）X に対して 1 意に定まる．

この命題 184 を用いるとつぎの補題が証明される（補題 26 参照）．

補題 185. $X \in M(3, \mathfrak{C})$ に対してつぎの 2 つの条件は同値である．

（1） $X \in \mathfrak{C}P(2)$，すなわち $X^* = X$, $X^2 = X$, $\mathrm{tr}(X) = 1$

（2） ある $\alpha \in F_4$ により $X = \alpha E_3$ と表わされる．

群 F_4 はつぎの部分群列を含むことが知られている．

$$F_4 \supset Spin\,(9) \supset Spin\,(8) \supset Spin\,(7) \supset G_2 \supset SU(3)$$

ここに

$$Spin\,(9) = \{\alpha \in F_4 \,|\, \alpha E_3 = E_3\}$$

$$Spin\,(8) = \{\alpha \in F_4 \,|\, \alpha E_i = E_i,\ i = 1, 2, 3\}$$

$$\cong \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \,|\, \alpha_i \in SO(8),\ \alpha_1(x)\alpha_2(y) = \overline{\alpha_3(\overline{xy})},\ x, y \in \mathfrak{C}\}$$

$$Spin\,(7) = \{\tilde{\alpha} \in SO(8) \,|\, \alpha(x)\tilde{\alpha}(y) = \tilde{\alpha}(xy),\ \alpha \in SO(7),\ x, y \in \mathfrak{C}\}$$

$$G_2 = \{\alpha \in SO(8) \,|\, \alpha(x)\alpha(y) = \alpha(xy),\ x, y \in \mathfrak{C}\} = Aut(\mathfrak{C})$$

$$SU(3) = \{\alpha \in G_2 \,|\, \alpha(e_1) = e_1\}$$

ここに $SO(8) = SO(\mathfrak{C})$, $SO(7) = \{\alpha \in SO(\mathfrak{C}) \,|\, \alpha(1) = 1\}$ とする．そしてつぎの等質空間を得る．

$$F_4/Spin(9) = \mathfrak{C}P(2) \qquad (\text{補題 185})$$

$$Spin(9)/Spin(8) = S^8 \qquad Spin(8)/Spin(7) = S^7$$

$$Spin(9)/Spin(7) = S^{15} \qquad (SO(8)/Spin(7) = \boldsymbol{R}P_7)$$

$$Spin(7)/G_2 = S^7 \qquad (SO(7)/G_2 = \boldsymbol{R}P_7)$$

$$G_2/SU(3) = S^6$$

この詳細は H. Freudenthal（26 頁），I. Yokota, exceptional Lie group F_4 and its representation rings, Shinshu Univ. 3（1968）にある．

$G_2/SU(3) = S^6$ の略証を与えておこう．$S^6 = \{x \in \mathfrak{C} \,|\, \mathrm{Re}\, x = 0,\ |x| = 1\}$ とする．写像 $\mu : G_2 \times S^6 \to S^6$, $\mu(\alpha, x) = \alpha(x)$ により G_2 は S^6 に働く．この働き方は推移的である．実際，$a_1 \in S^6$ を与える．a_1 と直交する $a_2 \in S^6$ をとり $a_3 = a_1 a_2$ とおく．つぎに a_1, a_2, a_3 にそれぞれ直交する $a_4 \in S^6$ をとり，$a_5 = a_1 a_4$, $a_6 = a_4 a_2$, $a_7 = a_1 a_6$ とおく．このとき $a_0 = 1, a_1, a_2, \cdots, a_7$ は $\mathfrak{C}$ の正規直交基になる．さて $\boldsymbol{R}$ - 準同型写像 $\alpha : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ を $\alpha(e_i) = a_i$, $i = 0, 1, \cdots, 7$ で定義すると $\alpha \in G_2$ であり $\alpha(e_1) = a_1$ となる．よって G_2 は

S^6 に推移的に働く．G_2 の e_1 における等方群 $G_{e_1} = \{\alpha \in G_2 \mid \alpha(e_1) = e_1\}$ が $SU(3)$ と同型であることを証明しよう．$\alpha(e_2) = (0, a, b, c, d, e, f)$（これは $\alpha(e_2) = ae_1 + be_2 + \cdots + fe_7$ のこととする），$\alpha(e_4) = (0, a', b', c', d', e', f')$，$\alpha(e_6) = (0, a'', b'', c'', d'', e'', f'')$ とおく．$\alpha(e_3) = \alpha(e_1e_2) = \alpha(e_1)\alpha(e_2) = e_1\alpha(e_2)$，同様に $\alpha(e_5) = e_1\alpha(e_4)$，$\alpha(e_7) = e_1\alpha(e_6)$ であるから α を基 $e_1, e_2, \cdots, e_7$ に関する行列で表わすと

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & a' & -b' & a'' & -b'' \\ 0 & b & a & b' & a' & b'' & a'' \\ 0 & c & -d & c' & -d' & c'' & -d'' \\ 0 & d & c & d' & c' & d'' & c'' \\ 0 & e & -f & e' & -f' & e'' & -f'' \\ 0 & f & e & f' & e' & f'' & e'' \end{pmatrix}$$

となる．この α に行列

$$A = \begin{pmatrix} a + bi & a' + b'i & a'' + b''i \\ c + di & c' + d'i & c'' + d''i \\ e + fi & e' + f'i & e'' + f''i \end{pmatrix}$$

を対応させると $A \in U(3)$ である．さらに $\det A = 1$ であることを示すために $\alpha(e_6) = \alpha(e_4)\alpha(e_2)$ を用いる．この式を成分で表わすと

$$\begin{cases} a'' = ce' - ec' + fd' - df' & b'' = fc' - cf' + ed' - de' \\ c'' = ea' - ae' + bf' - fb' & d'' = af' - fa' + be' - eb' \\ e'' = ac' - ca' + db' - bd' & f'' = da' - da' + cb' - bc' \end{cases}$$

となるが，これは $\fbox{}$ の行列式が $a'' - b''i$ であるなどの関係を示している．したがって $\det A = a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2 + e''^2 + f''^2 = 1$ となる．逆に $A \in SU(3)$ に対して上記の α を対応させると $\alpha \in G_{e_1}$ である．さて G_2 はコンパクト群である（G_2 は $SO(7)$ の閉部分群である）から命題 84 を用いると $G_2/SU(3) = S^6$ を得る．

埋め込み $\boldsymbol{RP}(n-1) \subset O(n)$, $\boldsymbol{CP}(n-1) \subset U(n)$, $\boldsymbol{HP}(n-1) \subset Sp(n)$（定理 25）に対応してつぎの定理がなりたつ．

定理 66. 写像 $f : \mathfrak{C}P(2) \to F_4$,

$$f(A) = \alpha : \mathfrak{J}(3, \mathfrak{C}) \longrightarrow \mathfrak{J}(3, \mathfrak{C})$$

$$\alpha X = 16(A \times X) \times A + 4A \circ X - 3X, \qquad X \in \mathfrak{J}(3, \mathfrak{C})$$

（ここに $X \times Y = \dfrac{1}{2}(2X \circ Y - \mathrm{tr}(X)Y - \mathrm{tr}(Y)X + (\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y) - \mathrm{tr}(X \circ Y))E)$,

$X, Y \in \mathfrak{J}(3, \mathfrak{C})$ とする）は単射同相写像である．したがって $\mathfrak{C}P(2)$ とその f による像 $f(\mathfrak{C}P(2))$ を同一視すると埋め込み

$$\mathfrak{C}P(2) \subset F_4$$

を得る．

埋め込み $CP(n-1) \subset U(n)$, $HP(n-1) \subset Sp(n)$ がそのままの形では $U(n)$, $Sp(n)$ の胞複体の構造と結びつかなかったように $\mathfrak{C}P(2) \subset F_4$ もこのままでは F_4 の胞体構造を調べるには役立たないであろう． 胞複体 $CP(n-1)$, $HP(n-1)$ の各胞体をそれぞれ1次元，3次元次元をあげて $U(n)$, $Sp(n)$ に埋め込んだが F_4 のときにも胞複体 $\mathfrak{C}P(2)$ の各胞体を何らかの方法で7次元だけ次元をあげて F_4 に埋め込む必要が起こるだろうがその方法は私にはわからない．また F_4 の胞体構造を調べるには G_2 の構造も関係するようである．G_2 については$G_2/SU(3)=S^6$ を用いて古典群と同様な考察をしてその胞体構造を知りたいと思ったがこれも私にはできない．

（5） ホモロジー群

定義　$C=\{C_n, \partial_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ がつぎの2つの条件

（1）　各 C_n は加群である．

（2）　各 ∂_n は $\partial_{n-1}\partial_n=0$ をみたす($\partial_0=0$ とする)準同型写像 $\partial_n: C_n \to C_{n-1}$ である．

をみたすとき C を**鎖複体**という． また C_n を n 次元**鎖群**，∂_n を**境界準同型写像**という．

鎖複体 $C=\{C_n, \partial_n\}$ において，C_n の部分群 $Z_n(C)$, $B_n(C)$ をそれぞれ

$$Z_n(C)=\mathrm{Ker}\,\partial_n, \qquad B_n(C)=\mathrm{Im}\,\partial_{n+1}$$

と定義するとき，条件 $\partial_n\partial_{n+1}=0$ より $B_n(C)$ は $Z_n(C)$ の部分加群であることがわかる．さて剰余加群

$$H_n(C)=Z_n(C)/B_n(C)$$

を鎖複体 C の n 次元**ホモロジー群**という．

例 169.　鎖複体 $C=\{C_n, \partial_n\}$ において，すべての ∂_n が $\partial_n=0$ であるならば，各 n に対して C のホモロジー群 $H_n(C)$ は C_n に群として同型である：

$$H_n(C) \cong C_n, \qquad n=0, 1, 2, \cdots$$

鎖複体 C のホモロジー群 $H_n(C)$ がすべての n に対して有限生成であるとき， その階数[†]を a_n で表わして，t に関する（形式的な）多項式

[†] 加群 A が有限生成であるとき，A はいくつかの（m 個とする）Z と有限加群との直和に群として同型である．この m を A の**階数**という．

$$P(C, t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kt^k$$

をつくり，$P(C, t)$ を鎖複体 C の **Poincaré 多項式**という．

位相空間 X に対して，**特異鎖複体**と呼ばれる鎖複体 $S(X)$ を構成して X のホモロジー群を定義しよう．

N を十分大きくとり N 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N$ を考える．$\boldsymbol{R}^N$ において点 $\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{0} = (0, 0, \cdots, 0)$, $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots 0), \cdots$, $\boldsymbol{e}^N = (0, \cdots, 0, 1)$ をとり，単体 $\varDelta^n$ を

$$\varDelta^n = [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n]$$

($\varDelta^0 = \{\boldsymbol{0}\}$) をつくる．さて，$\varDelta^n$ から X への連続写像

$$u : \varDelta^n \to X$$

全体を生成元とする自由加群を $S_n(X)$ とかく．つぎに境界準同型写像 $\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ を定義するために，線形写像[†]

$$F_i = F_{i,n} : \varDelta^{n-1} \longrightarrow \varDelta^n \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

を

$$\begin{cases} F_i(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_j & j < i \\ F_i(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_{j+1} & j \geqq i+1 \end{cases}$$

と定義する．そして準同型写像

$$\partial_n : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$$

を

$$\partial_n(u) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i uF_i$$

をみたすように定義する．このとき $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ であることが示されるので $S(X) = \{S_n(X), \partial_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ は鎖複体になる．この $S(X)$ から定義される n 次元ホモロジー群 $H_n(S(X))$ を $H_n(X)$ とかき，位相空間 X の n 次元（**特異**）**ホモロジー群**という．$S(X)$ の Poincaré 多項式 $P(S(X), t)$ を $P(X, t)$ で表わして，X の **Poincaré 多項式**という．

2つの位相空間 X, Y が同相であればそのホモロジー群は群として同型となる：

$$X \simeq Y \quad ならば \quad H_n(X) \cong H_n(Y),\ n = 0, 1, 2, \cdots$$

---

† 写像 $L : \varDelta^n \to \varDelta^m$ が

$$L(\lambda p + \mu q) = \lambda L(p) + \mu L(q)$$

($p, q \in \varDelta^n$, $\lambda + \mu = 1$, $\lambda, \mu \geqq 0$) をみたすとき**線形写像**という．線形写像は $\varDelta^n$ の頂点 $\boldsymbol{e}_i$ の像 $L(\boldsymbol{e}_i)$ ($i = 0, 1, \cdots, n$) を決めると定まる．

という事実はホモロジー群のもつ重要な性質の1つである．したがって，位相空間 X, Y のホモロジー群を計算して，ある n 次元ホモロジー群が群として同型でないならば，X と Y は同相でないと結論できるのである．

上に述べたようにして位相空間 X のホモロジー群を定義するのであるが，実際具体的な位相空間を与えたとき，上に述べたそのままの定義にもとづいてホモロジー群を求めることはとうていできるものではない．そこで位相空間 X のホモロジー群を計算する種々の方法が考えられているがそのうちで特につぎの2つの方法は有用である．

（I） X を CW 複体に分割する．（すべての位相空間が CW 複体に分割できるとは限らないが）

（II） ファイバー空間 (B, p, X, F) において**スペクトラル系列**を用いる．この理論は $H(B)$, $H(X)$, $H(F)$ のうちの2つを既知として他を導き出そうとする（例えば底空間 X とファイバー F のホモロジー群 $H(X)$, $H(F)$ を知って全空間 B のホモロジー群 $H(B)$ を知ろうとする）理論である．

(I) について少し説明しておこう．位相空間 X が CW 複体 $X=\cup e_i$ に分解されたとする．このとき n 次元胞体全体を生成元とする自由加群を $C_n(X)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ とし，かつ境界準同型写像 $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ を決められた一定の方法で定義すると $C(X)=\{C_n(X), \partial_n\}$ は鎖複体になる．(∂_n の定義の仕方はここでは省略するが，たとえば小松・中岡・菅原著，位相幾何学 I，岩波，参照)．そして鎖複体 $C(X)$ より得られるホモロジー群はさきに定義したホモロジー群 $H(X)$ と群として同型になっている．以下本書に現われた重要な空間のホモロジー群について述べておこう．

例 170. 1点 x_0 からなる空間 $X=\{x_0\}$ の鎖複体 $C(X)$ は

$$\begin{cases} C_0(X) \cong \boldsymbol{Z} \\ C_i(X)=0, & i \geqq 1 \end{cases}$$
$$\partial_i = 0, \qquad i \geqq 0$$

で与えられる．したがってそのホモロジー群は

$$\begin{cases} H_0(X) \cong \boldsymbol{Z} \\ H_i(X)=0, & i \geqq 1 \end{cases}$$

であり，Poincaré 多項式は

$$P(X, t)=1$$

である．

例 171. 球面 $S^n = e^0 \cup e^n$（定理 27）の鎖複体 $C(S^n)$ において，e^0, e^n に対する境界準同型写像 ∂[†] の作用は

$$\begin{cases} \partial e^0 = 0 \\ \partial e^n = 0 \end{cases}$$

で与えられる．したがって S^n のホモロジー群は

$$\begin{cases} H_0(S^n) \cong \boldsymbol{Z} \\ H_n(S^n) \cong \boldsymbol{Z} \\ H_i(S^n) = 0, \qquad i \neq 0, n \end{cases}$$

であり，Poincaré 多項式は

$$P(S^n, t) = 1 + t^n$$

である．

例 172. 実射影空間 $\boldsymbol{R}P(n) = e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^n$（定理 31）の鎖複体 $C(\boldsymbol{R}P(n))$ において境界準同型写像 ∂ は

$$\begin{cases} \partial e^0 = 0 \\ \partial e^1 = 0 \\ \partial e^2 = 2e^1 \\ \quad \cdots\cdots \\ \partial e^{2k-1} = 0 \\ \partial e^{2k} = 2e^{2k-1} \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ \partial e^n = \begin{cases} 0 & n \text{ が奇数のとき} \\ 2e^{n-1} & n \text{ が偶数のとき} \end{cases} \end{cases}$$

で与えられる．したがって $\boldsymbol{R}P(n)$ のホモロジー群は

$$\begin{cases} H_0(\boldsymbol{R}P(n)) \cong \boldsymbol{Z} \\ H_{2k-1}(\boldsymbol{R}P(n)) \cong \boldsymbol{Z}_2 & 1 \leqq 2k-1 < n \\ H_{2k}(\boldsymbol{R}P(n)) = 0 & 2 \leqq 2k \leqq n \\ H_n(\boldsymbol{R}P(n)) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} \\ 0 \end{cases} & \begin{matrix} n \text{ が奇数のとき} \\ n \text{ が偶数のとき} \end{matrix} \\ H_i(\boldsymbol{R}P(n)) = 0 & i > n \end{cases}$$

---

† 以下 ∂_n の添数 n を省略して単に ∂ とかく．

であり，Poincaré 多項式は

$$P(\boldsymbol{R}P(n),\ t)=\begin{cases}1+t^n & n\ \text{が奇数のとき}\\ 1 & n\ \text{が偶数のとき}\end{cases}$$

である．

例 173. 複素射影空間 $\boldsymbol{C}P(n)=e^0\cup e^2\cup e^4\cup\cdots\cup e^{2n}$（定理 31）の鎖複体における境界準同型写像 ∂ はつねに $\partial=0$ となっている．したがって $\boldsymbol{C}P(n)$ のホモロジー群は

$$\begin{cases}H_{2k}(\boldsymbol{C}P(n))\cong\boldsymbol{Z}, & 0\leqq k\leqq n\\ H_i(\boldsymbol{C}P(n))=0, & \text{その他のとき}\end{cases}$$

であり，Poincaré 多項式は

$$P(\boldsymbol{C}P(n),\ t)=1+t^2+t^4+\cdots+t^{2n}$$

である．

例 174. 4 元数射影空間 $\boldsymbol{H}P(n)=e^0\cup e^4\cup e^8\cup\cdots\cup e^{4n}$（定理 31）の鎖複体における境界準同型写像 ∂ はつねに $\partial=0$ となっている．したがって $\boldsymbol{H}P(n)$ のホモロジー群は

$$\begin{cases}H_{4k}(\boldsymbol{H}P(n))\cong\boldsymbol{Z}, & 0\leqq k\leqq n\\ H_i(\boldsymbol{H}P(n))=0, & \text{その他のとき}\end{cases}$$

であり，Poincaré 多項式は

$$P(\boldsymbol{H}P(n),\ t)=1+t^4+t^8+\cdots+t^{4n}$$

である．

例 175. Cayley 数体上の射影平面 $\mathfrak{C}P(2)=e^0\cup e^8\cup e^{16}$（定理 29）の鎖複体における境界準同型写像 ∂ はつねに $\partial=0$ となっている．したがって $\mathfrak{C}P(2)$ のホモロジー群は

$$\begin{cases}H_i(\mathfrak{C}P(2))\cong\boldsymbol{Z}, & i=0,\ 8,\ 16\\ H_i(\mathfrak{C}P(2))=0, & \text{その他のとき}\end{cases}$$

であり，Poincaré 多項式は

$$P(\mathfrak{C}P(2),\ t)=1+t^8+t^{16}$$

である．

例 176. 回転群 $SO(n)$ の CW 複体構造（定理 33）に関する鎖複体においては境界準同型写像 ∂ は

$$\partial e^{k_1-1,\cdots,k_m-1}=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{(k_1-1)+\cdots+(k_m-1)}((-1)^{k_i-1}+1)e^{k_1-1,\cdots,k_{i-1}-1,k_i-2,k_{i+1}-1,\cdots,k_m-1}$$

で与えられる．ここに右辺の記号 $e^{**\cdots *}$ は $k_i - 1 = k_{i+1}$ $(i > 1)$ または $k_1 = 1$ のときは0であると約束する．$SO(n)$ の Poincaré 多項式は

$$P(SO(n), t) = \begin{cases} (1+t^3)(1+t^7)\cdots(1+t^{4m-1}) & (n = 2m+1) \\ (1+t^3)(1+t^7)\cdots(1+t^{4m-1})(1+t^{2m+1}) & (n = 2m+2) \end{cases}$$

となる．詳しいことは C. E. Miller, The topology of rotation groups, Ann. of Math., 80 (1964) にある．

例 177. ユニタリ群 $U(n)$ の CW 複体構造（定理36）に関する鎖複体においては境界準同型写像 ∂ は $\partial = 0$ となっている．したがって $U(n)$ の Poincaré 多項式は

$$P(U(n), t) = (1+t)(1+t^3)(1+t^5)\cdots(1+t^{2n-1})$$

である．特殊ユニタリ群 $SU(n)$ の CW 複体構造（定理38）に関する鎖複体においても $\partial = 0$ であり，$SU(n)$ の Poincaré 多項式は

$$P(SU(n), t) = (1+t^3)(1+t^5)\cdots(1+t^{2n-1})$$

である．

例 178. シンプレクティック群 $Sp(n)$ の CW 複体構造（定理40）に関する鎖複体においては境界準同型写像 ∂ は $\partial = 0$ となっている．$Sp(n)$ の Poincaré 多項式は

$$P(Sp(n), t) = (1+t^3)(1+t^7)\cdots(1+t^{4n-1})$$

である．

（II） スペクトラル系列を用いても例172-178に現われる空間のホモロジー群を求めることができる．例えばファイバー空間 $SU(n)/SU(n-1) = S^{2n-1}$（定理50）において $H(S^{2n-1})$, $H(SU(n-1))$（これは帰納法の仮定とする）を知って $H(SU(n))$ を求めるのである．これらの詳しいことは J. P. Serre, Homologie singulière des espace fibrés, Ann. of Math., 54 (1951), A. Borel, Sur la cohomologie des espace fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math., 57 (1953) にある．

（6） Clifford 代数

定義 K を可換体とする．K-加群 V の任意の2元 x, y に対して K の元 $\langle x, y\rangle$ が1意に定まり，つぎの3つの条件

（1） $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$

（2） $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$

（3） $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$　　　$\lambda \in K$

をみたすとき V を**対称な内積をもつ K-加群**という.

例 179. K を可換体とし, n 個の K の元 $c_1, \cdots, c_n$ を固定しておく. K^n のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_n)$ に対して

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i b_i$$

と定義すると K^n は対称な内積をもつ K-加群になる. 特に $c_1 = \cdots = c_n = 1$, $c_1 = \cdots = c_n = -1$ のときが重要でありそれぞれ $K_+{}^n$, $K_-{}^n$ で表わす.

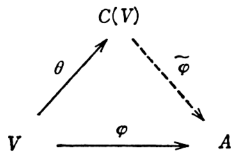
定義 V を対称な内積をもつ K-加群とする. $(C(V), \theta)$ が V の **Clifford K-代数**であるとは, つぎの3つの条件をみたすことである.

(1) $C(V)$ は単位元1をもつ K-多元環である.

(2) $\theta: V \to C(V)$ は (K-加群の) K-準同型写像であって

$$\theta(x)^2 = \langle x, x \rangle 1, \qquad x \in V$$

をみたす.



(3) 単位元1をもつ任意の K-多元環 A と

$$\varphi(x)^2 = \langle x, x \rangle 1$$

をみたす任意の (K-加群の) K-準同型写像 $\varphi: V \to A$ に対して

$$\varphi = \tilde{\varphi}\theta$$

をみたす K-多元環の K-準同型写像 ($\tilde{\varphi}(1) = 1$ も要求する) $\tilde{\varphi}: C(V) \to A$ がただ1つ存在する (普遍性の条件).

$(C(V), \theta)$, $(C'(V), \theta')$ を V の2つの Clifford K-代数とするとき, $(C(V), \theta)$ と $(C'(V), \theta')$ が **Clifford K-代数として同型**であるとは

$$\theta' = f\theta$$

をみたす K-多元環の K-同型写像 $f: C(V) \to C'(V)$ が存在することである.

命題 186. V を対称な内積をもつ K-加群とするとき, つぎの (1), (2) がなりたつ.

(1) V の Clifford K-代数 $(C(V), \theta)$ は (Clifford K-代数の同型を除いて) ただ1つ存在する.

(2) $\theta: V \to C(V)$ は (K-加群の) K-単射(準同型写像) である.

略証 Clifford K-代数の存在のみ証明しておこう. $T(V)$ を V のテンソル K-代数

とする：$T(V)=\sum_{k\geqq 0}T^k(V)$,

$$T^0(V)=K,\ T^1(V)=V,\ T^k(V)=\underbrace{V\otimes_K\cdots\otimes_K V}_{k},\cdots$$

$R(V)$ を $\{x\otimes x-\langle x, x\rangle 1 \mid x\in V\}$ より生成される $T(V)$ の両側イデアルとし $C(V)=T(V)/R(V)$ とおく．また $\theta: V=T^1(V)\subset T(V)\to C(V)=T(V)/R(V)$ とすると $(C(V),\theta)$ が求めるものである．この θ は単射であるから θ を省略するのが普通である：$V\subset C(V)$.

定義　$A=A^0\oplus A^1$ が $\boldsymbol{Z}_2$-次数つき K-多元環であるとは

（1）　A は部分 K-加群 A^0, A^1 の直和である．

（2）　A は K-多元環である．

（3）　$A^0A^0\subset A^0$, $A^1A^1\subset A^0$, $A^1A^0\subset A^1$, $A^0A^1\subset A^1$

をみたすことである．

Clifford K-代数 $C(V)$ は $\boldsymbol{Z}_2$-次数つき K-多元環である．

A, B を $\boldsymbol{Z}_2$-次数つき K-多元環とするとき，$\boldsymbol{Z}_2$-次数つき K-多元環 $A\hat{\otimes}_K B$ をつぎのように定義する．

（1）　$A\hat{\otimes}_K B=(A\hat{\otimes}_K B)^0\oplus(A\hat{\otimes}_K B)^1$　　（直和）

ここに $(A\hat{\otimes}_K B)^0=(A^0\hat{\otimes}_K B^0)\oplus(A^1\hat{\otimes}_K B^1)$, $(A\hat{\otimes}_K B)^1=(A^0\hat{\otimes}_K B^1)\oplus(A^1\hat{\otimes}_K B^0)$ とする．

（2）　$(a\otimes b)(a'\otimes b')=(-1)^{ji'}(aa'\otimes bb')$　　$(a'\in A^{i'},\ b\in B^j)$

これだけ準備してつぎの補題を述べよう．

補題 187.　V を対称な内積をもつ K-加群とし，かつ V は部分 K-加群 V_1, V_2 の直交する直和であるとする：

$$V=V_1\oplus V_2,\quad \langle V_1, V_2\rangle=0$$

$(C(V),\theta)$, $(C(V_1),\theta_1)$, $(C(V_2),\theta_2)$ をそれぞれ V, V_1, V_2 の Clifford K-代数とする．いま写像 $\Theta: V\to C(V_1)\hat{\otimes}_K C(V_2)$ を

$$\Theta(x_1+x_2)=\theta_1(x_1)\otimes 1+1\otimes\theta_2(x_2)$$

と定義すると $(C(V_1)\hat{\otimes}_K C(V_2),\Theta)$ は V の Clifford K-代数となる．すなわち $C(V)$ と $C(V_1)\hat{\otimes}_K C(V_2)$ は K-多元環として同型である．

V を対称な内積をもつ 1 次元 K-加群とする．このとき V の基 e をとり $\langle e, e\rangle=c$ とするとき $C(V)$ は基 1, e をもち，$e^2=c1$（1 は単位元）の関係をもつ 2 次元 K-多元

環であるから補題 187 を繰返し用いるとつぎの命題を得る.

命題 188. V を対称な内積をもつ K-加群とし，かつ V は直交する 1 次元部分 K-加群の直和であるとする：

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n, \qquad \langle V_i, V_j \rangle = 0 \quad (i \neq j)$$

このとき $e_1, \cdots, e_n$ をそれぞれ $V_1, \cdots, V_n$ の基とし

$$\langle e_i, e_i \rangle = c_i, \qquad i = 1, \cdots, n$$

とおくと，V の Clifford K-代数 $C(V)$ は

$$1, \cdots, e_i, \cdots, e_i \otimes e_j, \cdots, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}, \cdots, e_1 \otimes \cdots \otimes e_n$$
$$(i < j) \qquad (i_1 < \cdots < i_r)$$

を基にもち

$$\begin{cases} e_i \otimes e_i = c_i 1 \\ e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i = 0 \qquad (i \neq j) \end{cases}$$

の関係をもつ K-多元環であることがわかる.

なお Clifford 代数の詳しいことは C. Chevalley, The Construction and Study of Certain Important Algebras, Publ. Math. Soc. Japan, 1955 にある.

あとがき

この書について，さらに位相群あるいは位相幾何を勉強しようとされる方には，まずつぎのすぐれた3つの名著を読むことをおすすめしたい．

〔1〕 C. Chevalley, Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press, 1946.

〔2〕 L. S. Pontrjagin, Topological groups,（邦訳）連続群論上，下，岩波書店，1957, 1958.

〔3〕 N. E. Steenrod, The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951.

このほかつぎの書も参考にすることをおすすめする．

〔4〕 D. Montgomery-L. Zippin, Topological transformation groups, Interscience, 1955.

〔5〕 山内恭彦－杉浦光夫，連続群論入門（新数学シリーズ），培風館，1960.

〔6〕 松島与三，多様体入門（数学選書），裳華房，1965.

〔7〕 岩堀長慶，リー群論Ｉ，Ⅱ（現代応用数学講座），岩波書店，1957.

〔8〕 J. R. Munkres, Elemenary differential topology (Ann. of Math. Studies), Princeton Univ. Press, 1961.

〔9〕 P. Hilton-S. Wylie, Homology theory, Combridge Univ. Press, 1960.

〔10〕 S. T. Hu, Homotopy theory, Academic Press, 1959.

〔11〕 E. H. Spanier, Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966.

〔12〕 D. Husemoller, Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.

〔13〕 小松醇郎-戸田宏-中岡稔，位相幾何学（現代数学講座），共立出版，1957.

〔14〕 小松醇郎-中岡稔-菅原正博，位相幾何学Ｉ（現代数学），岩波書店，1967.

〔15〕 河田敬義編，位相幾何学（現代数学演習講座），岩波書店，1965.

索　引

ク グ

ケ ゲ

コ

サ ザ

シ ジ

ス

セ　ゼ

ソ

タ　ダ

チ

テ デ

ト ド

ナ

著者略歴

1926年（大正15年）大阪府出身　旧制大阪高等学校理科甲類卒
大阪大学理学部数学科卒　大阪市立大学助手，講師，助教授を経て
現在信州大学教授（理学部数学科）理学博士

基礎数学選書 5　群と位相　　定価 2500 円

昭和 46 年 2 月 20 日　第 1 版印刷
昭和 46 年 2 月 25 日　第 1 版発行 ©
昭和 57 年 7 月 25 日　第 9 版発行

著作者の了解により検印を省略いたします

著作者　横田一郎（よこた いちろう）
発行者　吉野達治
発行所　東京都千代田区四番町 8 番地
電話 東京 262—9166〜9
株式会社 裳華房

印刷所　中央印刷株式会社
製本所　株式会社 高陽堂

社団法人
自然科学書協会会員

ISBN 4-7853-1105-3

Printed in Japan